Parciális differenciálegyenletek mintavizsga

2019. tavasz

Tudnivalók. A vizsga két részből áll, amelyek időben nem különülnek el egymástól. A rövid kérdések egy-egy fogalomra, tételre vagy példára kérdeznek rá, a második rész egy nagyobb témakör áttekintése irányított kérdéseken keresztül. Bizonyítani akkor kell, ha az adott feladat kéri. Fontos, hogy a válaszokban használt jelölésekről egyértelműen kiderüljön, hogy milyen típusú objektumot jelölnek (szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.). Az első részben 30, a másodikban 20 pont szerezhető, külön-külön nincs minimálisan szükséges pontszám, hanem a vizsga érdemjegyét az összpontszám határozza meg. A ponthatárok nem lesznek szigorúbbak, mint 20–27–34–41.

Rövid kérdések.

1. Írja fel a $\partial_1^2 u(x,y) - 2\partial_{12} u(x,y) + \partial_1 u(x,y) = 0$ egyenlet főrészének együtthatómátrixát és határozza meg az egyenlet típusát! (3 pont)
2. Adja meg a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia két feltételét! (2 pont)
3. Definiálja reguláris disztribúció és Dirac-delta disztribúció fogalmát! (2+2 pont)
4. Mondja ki a disztribúciók sorozatfolytonosságának ekvivalens átfogalmazásáról szóló tételt! (3 pont)
5. Adja meg egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ esetén a $\partial^\alpha u$ derivált definícióját! (2 pont)
6. Adja meg $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ esetén az $u \times v$ disztribúciót, és azt is, hogy milyen térnek az eleme! (2 pont)
7. Ha $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és létezik $u * v$, akkor milyen térnek az eleme? (1 pont)
8. Értelmezze L lineáris differenciáloperátor alapmegoldásának fogalmát, és mondja ki az $Lu = F$ egyenlet megoldhatóságáról szóló tételt. (3 pont)
9. Definiálja a hővezetési egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatot! (Figyeljen a feltételekre!) (3 pont)
10. Definiálja a $-\Delta u = f$ Ω-ban, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ feladathoz tartozó Green-függvény fogalmát! (3 pont)
11. Írja fel egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény eredeti és ekvivalens normáját multiindexes jelölés használata nélkül! (3 pont)
12. Miért nem értelmezhető egy $u \in H^1(\Omega)$ függvénynek a peremre való megszorítása a klasszikus módon? (1 pont)

Parciális differenciálegyenletek mintavizsga

2019. tavasz

Tudnivalók. A vizsga két részből áll, amelyek időben nem különülnek el egymástól. A rövid kérdések egy-egy fogalomra, tételre vagy példára kérdeznek rá, a második rész egy nagyobb témakör áttekintése irányított kérdéseken keresztül. Bizonyítani akkor kell, ha az adott feladat kéri. Fontos, hogy a válaszokban használt jelölésekről egyértelműen kiderüljön, hogy milyen típusú objektumot jelölnek (szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.). Az első részben 30, a másodikban 20 pont szerezhető, külön-külön nincs minimálisan szükséges pontszám, hanem a vizsga érdemjegyét az összpontszám határozza meg. A ponthatárok nem lesznek szigorúbbak, mint 20–27–34–41.

Rövid kérdések.

1. Írja fel a $\partial_1^2 u(x,y) - 2\partial_{12} u(x,y) + \partial_1 u(x,y) = 0$ egyenlet főrészének együtthatómátrixát és határozza meg az egyenlet típusát! (3 pont)
2. Adja meg a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia két feltételét! (2 pont)
3. Definiálja reguláris disztribúció és Dirac-delta disztribúció fogalmát! (2+2 pont)
4. Mondja ki a disztribúciók sorozatfolytonosságának ekvivalens átfogalmazásáról szóló tételt! (3 pont)
5. Adja meg egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ esetén a $\partial^\alpha u$ derivált definícióját! (2 pont)
6. Adja meg $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ esetén az $u \times v$ disztribúciót, és azt is, hogy milyen térnek az eleme! (2 pont)
7. Ha $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és létezik $u * v$, akkor milyen térnek az eleme? (1 pont)
8. Értelmezze L lineáris differenciáloperátor alapmegoldásának fogalmát, és mondja ki az $Lu = F$ egyenlet megoldhatóságáról szóló tételt. (3 pont)
9. Definiálja a hővezetési egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatot! (Figyeljen a feltételekre!) (3 pont)
10. Definiálja a $-\Delta u = f$ Ω-ban, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ feladathoz tartozó Green-függvény fogalmát! (3 pont)
11. Írja fel egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény eredeti és ekvivalens normáját multiindexes jelölés használata nélkül! (3 pont)
12. Miért nem értelmezhető egy $u \in H^1(\Omega)$ függvénynek a peremre való megszorítása a klasszikus módon? (1 pont)

Témakör kifejtése: peremérték-feladatok gyenge megoldása.

1. A p és q függvényekre nézve milyen feltételek mellett van legfeljebb egy klasszikus megoldása az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ első peremérték-feladatnak? (2 pont)

2. Milyen tesztfüggvénnyel szorozzuk a gyenge alak levezetésekor az $Lu = f$ egyenletet? Írja fel Green első formuláját és alkalmazza a tesztfüggvénnyel beszorzott egyenletre! (1+3 pont)

3. Az előbbi levezetés alapján értelmezze az általánosított első peremérték-feladatot inhomogén peremfeltétel esetén („gyenge alak”). A klasszikus esethez képest milyen gyengébb feltételek vonatkoznak a feladatban szereplő függvényekre? Milyen térben keressük a gyenge megoldást? (4 pont)

4. Igazolja gyenge megoldás egyértelmű létezését és a jobb oldaltól való folytonos függését! (10 pont)

Képletgyűjtemény.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t\le 0, x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n=2, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n\ge 3, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Témakör kifejtése: peremérték-feladatok gyenge megoldása.

1. A p és q függvényekre nézve milyen feltételek mellett van legfeljebb egy klasszikus megoldása az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ első peremérték-feladatnak? (2 pont)

2. Milyen tesztfüggvénnyel szorozzuk a gyenge alak levezetésekor az $Lu = f$ egyenletet? Írja fel Green első formuláját és alkalmazza a tesztfüggvénnyel beszorzott egyenletre! (1+3 pont)

3. Az előbbi levezetés alapján értelmezze az általánosított első peremérték-feladatot inhomogén peremfeltétel esetén („gyenge alak”). A klasszikus esethez képest milyen gyengébb feltételek vonatkoznak a feladatban szereplő függvényekre? Milyen térben keressük a gyenge megoldást? (4 pont)

4. Igazolja gyenge megoldás egyértelmű létezését és a jobb oldaltól való folytonos függését! (10 pont)

Képletgyűjtemény.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t\le 0, x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n=2, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n\ge 3, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{cases}$$