

1. feladatsor  
III. éves alkmát parcdiff 2019. tavasz

1. Keressük meg az alábbi egyenletek  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  klasszikus megoldásait!

- a)  $\partial_y u = 0$                       e)  $\partial_x u - \partial_y u = 0$   
b)  $\partial_{xy} u = 0$                     f)  $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$   
c)  $\partial_{xy} u = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$         g)  $\partial_x^2 u - a^2 \partial_y^2 u = 0$  ( $a \in \mathbb{R}$ )  
d)  $\partial_{xy} u + 2x \partial_y u = x$         h)  $(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = 0$

2. Adjuk meg a  $\partial_x^2 u(x, y, z) = 0$  feladat  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  általános megoldását!

3. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladatok  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  megoldását!

- a)  $\begin{cases} \partial_{xy} u = x + y \\ u(x, x) = x \\ \partial_1 u(x, x) = 0 \end{cases}$         b)  $\begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \\ u(0, y) = 1 \\ \partial_x u(0, y) = 1 \end{cases}$

4. Keressük meg a  $\partial_x^2 u - \partial_y u = 0$  egyenlet  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  alakú klasszikus megoldásait!

5. Keressünk  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  polinomokat, amelyekre  $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ .

6. Tegyük fel, hogy az  $u \in C^4(\mathbb{R}^2)$  függvényre  $\Delta u = 0$ . Igazoljuk, hogy ekkor a  $v(x, y) := (x^2 + y^2)u(x, y)$  függvényre  $\Delta^2 v = 0$ .

\*7. Adjuk meg a  $\partial_x u \cdot \partial_y u = 0$  egyenlet  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$  megoldásait!