

## Parciális differenciálegyenletek mintavizsga

2018. tavasz

**Tudnivalók.** A vizsga két részből áll, amelyek időben nem különülnek el egymástól. A rövid kérdések egy-egy fogalomra, tételre vagy példára kérdeznek rá, a második rész egy nagyobb témakör áttekintése irányított kérdéseken keresztül. Bizonyítani akkor kell, ha az adott feladat kéri. Fontos, hogy a válaszokban használt jelölésekről egyértelműen kiderüljön, hogy milyen típusú objektumot jelölnek (szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.). Az első részben 30, a másodikban 20 pont szerezhető, külön-külön nincs minimálisan szükséges pontszám, hanem a vizsga érdemjegyet az összpontszám határozza meg. A ponthatárok nem lesznek szigorúbbak, mint 25–31–37–43.

---

### Rövid kérdések.

1. Írja fel a  $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$  egyenlet főrészét és ennek alapján az együtthatómátrixát, majd adja meg az egyenlet típusát! (3 pont)
2. Adja meg a  $\mathcal{D}(\Omega)$ -beli konvergencia két feltételét! (2 pont)
3. Definiálja reguláris disztribúció és Dirac-delta disztribúció fogalmát! (2+2 pont)
4. Mondja ki a disztribúciók sorozatfolytonosságának ekvivalens átfogalmazásáról szóló tételt! (3 pont)
5. Adja meg egy  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  esetén a  $\partial^\alpha u$  derivált definícióját! (2 pont)
6. Adja meg  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  esetén az  $u \times v$  disztribúciót, és azt is, hogy milyen térnek az eleme! (2 pont)
7. Ha  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  és létezik  $u * v$ , akkor milyen térnek az eleme? (1 pont)
8. Értelmezze  $L$  lineáris differenciáloperátor alapmegoldásának fogalmát, és mondja ki az  $Lu = F$  egyenlet megoldhatóságáról szóló tételt. (3 pont)
9. Definiálja a hővezetési egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatot! (Figyeljen a feltételekre!) (3 pont)
10. Definiálja a  $-\Delta u = f$   $\Omega$ -ban,  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  feladathoz tartozó Green-függvény fogalmát! (4 pont)
11. Írja fel egy  $u \in H_0^1(\Omega)$  függvény eredeti és ekvivalens normáját multiindex jelölés használata nélkül! (3 pont)
12. Miért nem értelmezhető egy  $u \in H^1(\Omega)$  függvénynek a peremre való megszorítása a klasszikus módon? (1 pont)

## Parciális differenciálegyenletek mintavizsga

2018. tavasz

**Tudnivalók.** A vizsga két részből áll, amelyek időben nem különülnek el egymástól. A rövid kérdések egy-egy fogalomra, tételre vagy példára kérdeznek rá, a második rész egy nagyobb témakör áttekintése irányított kérdéseken keresztül. Bizonyítani akkor kell, ha az adott feladat kéri. Fontos, hogy a válaszokban használt jelölésekről egyértelműen kiderüljön, hogy milyen típusú objektumot jelölnek (szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.). Az első részben 30, a másodikban 20 pont szerezhető, külön-külön nincs minimálisan szükséges pontszám, hanem a vizsga érdemjegyet az összpontszám határozza meg. A ponthatárok nem lesznek szigorúbbak, mint 25–31–37–43.

---

### Rövid kérdések.

1. Írja fel a  $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$  egyenlet főrészét és ennek alapján az együtthatómátrixát, majd adja meg az egyenlet típusát! (3 pont)
2. Adja meg a  $\mathcal{D}(\Omega)$ -beli konvergencia két feltételét! (2 pont)
3. Definiálja reguláris disztribúció és Dirac-delta disztribúció fogalmát! (2+2 pont)
4. Mondja ki a disztribúciók sorozatfolytonosságának ekvivalens átfogalmazásáról szóló tételt! (3 pont)
5. Adja meg egy  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  esetén a  $\partial^\alpha u$  derivált definícióját! (2 pont)
6. Adja meg  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  esetén az  $u \times v$  disztribúciót, és azt is, hogy milyen térnek az eleme! (2 pont)
7. Ha  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  és létezik  $u * v$ , akkor milyen térnek az eleme? (1 pont)
8. Értelmezze  $L$  lineáris differenciáloperátor alapmegoldásának fogalmát, és mondja ki az  $Lu = F$  egyenlet megoldhatóságáról szóló tételt. (3 pont)
9. Definiálja a hővezetési egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatot! (Figyeljen a feltételekre!) (3 pont)
10. Definiálja a  $-\Delta u = f$   $\Omega$ -ban,  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  feladathoz tartozó Green-függvény fogalmát! (4 pont)
11. Írja fel egy  $u \in H_0^1(\Omega)$  függvény eredeti és ekvivalens normáját multiindex jelölés használata nélkül! (3 pont)
12. Miért nem értelmezhető egy  $u \in H^1(\Omega)$  függvénynek a peremre való megszorítása a klasszikus módon? (1 pont)

**Témakör kifejtése:** peremérték-feladatok gyenge megoldása.

1. A  $p$  és  $q$  függvényekre nézve milyen feltételek mellett van legfeljebb egy klasszikus megoldása az  $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$ ,  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  első peremérték-feladatnak? (2 pont)
2. Milyen tesztfüggvénnyel szorozzuk a gyenge alak levezetések az  $Lu = f$  egyenletet? Írja fel Green első formuláját és alkalmazza a tesztfüggvénnyel beszorzott egyenletre! (1+3 pont)
3. Az előbbi levezetés alapján értelmezze az általánosított első peremérték-feladatot inhomogén peremfeltétel esetén („gyenge alak”). A klasszikus esethez képest milyen gyengébb feltételek vonatkoznak a feladatban szereplő függvényekre? Milyen térben keressük a gyenge megoldást? (4 pont)
4. Igazolja gyenge megoldás egyértelmű létezését és a jobb oldaltól való folytonos függését! (10 pont)

**Képletgyűjtemény.**

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau, \xi) d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi) d\xi$$

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\tau d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(\xi) d\xi$$

$$\frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi_1} \log|x|, & \text{ha } n = 2, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{cases}$$

**Témakör kifejtése:** peremérték-feladatok gyenge megoldása.

1. A  $p$  és  $q$  függvényekre nézve milyen feltételek mellett van legfeljebb egy klasszikus megoldása az  $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$ ,  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  első peremérték-feladatnak? (2 pont)
2. Milyen tesztfüggvénnyel szorozzuk a gyenge alak levezetések az  $Lu = f$  egyenletet? Írja fel Green első formuláját és alkalmazza a tesztfüggvénnyel beszorzott egyenletre! (1+3 pont)
3. Az előbbi levezetés alapján értelmezze az általánosított első peremérték-feladatot inhomogén peremfeltétel esetén („gyenge alak”). A klasszikus esethez képest milyen gyengébb feltételek vonatkoznak a feladatban szereplő függvényekre? Milyen térben keressük a gyenge megoldást? (4 pont)
4. Igazolja gyenge megoldás egyértelmű létezését és a jobb oldaltól való folytonos függését! (10 pont)

**Képletgyűjtemény.**

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau, \xi) d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi) d\xi$$

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\tau d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(\xi) d\xi$$

$$\frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi_1} \log|x|, & \text{ha } n = 2, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{cases}$$