6. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátos, és legyen ekkor $u(t,x) = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta$.

   a) Bizonyítsuk be, hogy $u(0,x) = g(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén.

   b) Tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, amelyre $g, \partial_j g, \partial_j^2 g$ $(j = 1, \dots, n)$ korlátosak. Mutassuk meg, hogy ekkor $\partial_t u - \Delta u = 0$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben.

2. Oldjuk meg az alábbi parabolikus Cauchy-feladatokat!

   a) $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

3. Legyen $n = 1$, $f = 0$, és tekintsük a parabolikus Cauchy-feladatot.

   a) Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R})$ korlátos. Igazoljuk, hogy ha $g(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a Cauchy-feladat $u$ megoldására $u(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

   b) Tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R})$ és $g$, $g'$, $g''$ korlátos. Igazoljuk, hogy ha $g$ konvex, akkor minden $t > 0$ esetén a Cauchy-feladat $u$ megoldására $u(t, \cdot)$ is konvex.

4. Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus Cauchy-feladat $u$ megoldása folytonosan függ $g$-tõl a következő értelemben: ha $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátosak, amelyekre $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, akkor a parabolikus Cauchy-feladat megfelelő $u_1$, $u_2$ megoldásaira $|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leq \varepsilon$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

5. Legyen $n = 1$, $f = 0$, $g \in C(\mathbb{R})$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{supp} g \subset [a,b]$, valamint $g|_{[a,b]} > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a parabolikus Cauchy-feladat $u$ megoldására $u(t,x) > 0$ minden $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ esetén! (Végtelen sebességű hőterjedés)

*6. Legyen $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\partial_1 g$ folytonos $\mathbb{R}^2$-en. Értelmezzük az $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(x) = \displaystyle\int_a^x g(x,y)\, dy$, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Mutassuk meg, hogy $f'(x) = g(x,x) + \displaystyle\int_a^x \partial_1 g(x,y)\, dy$.

7. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben}, \\ v(0,x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

   feladatcsaládot, ahol $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. Tegyük fel, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ esetén a feladat $v(\cdot,\cdot;\tau)$ megoldására $v, \partial_t v,\ \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$. Értelmezzük ekkor az $u$ függvényt a következőképpen:

$$u(t,x) = \int_0^t v(t-\tau, x; \tau) d\tau.$$

   Bizonyítsuk be, hogy $\partial_t u - \Delta u = f$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben és $u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, azaz $u$ megoldása a második részfeladatnak. (Duhamel-elv)

8. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatokat!

   a) $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x + t & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = e^x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \partial_t u - 4\partial_x^2 u + u = e^x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$