5. feladatsor

III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Bizonyítsuk be, hogy a $\partial_t u - \Delta u = 0$ hővezetési egyenlet dilatációra nézve invariáns, pontosabban, ha $v(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ $(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\partial_t v - \Delta v = 0$.
2. Keressünk az n-dimenziós hővezetési egyenletnek $u(t,x) = \dfrac{1}{t^\alpha} v\left(\dfrac{|x|^2}{t}\right)$ $(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$ alakú megoldásait, ahol $v \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Igazoljuk, hogy $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = (\sqrt{\pi}\,)^n$.
4. Legyen $E\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, amelyre

$$E(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \text{ha } \ t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{ha } \ t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

   a) Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq 0$, akkor $\displaystyle\lim_{t \to 0+} E(t,x) = 0$, viszont $\displaystyle\lim_{t \to 0+} E(t,0) = +\infty$.
   b) Igazoljuk, hogy minden $t > 0$ esetén $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\, dx = 1$.
   c) Mutassuk meg, hogy $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.
   d) Igazoljuk, hogy $\partial_t E(t,x) - \Delta E(t,x) = 0$, ha $t > 0$ és $x \in \mathbb{R}^n$.
   e) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_t E - \Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}^{n+1}$-en.
5. Legyenek $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ konstansok. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos by\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

*6. Legyen $E\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log|x|, & \text{ha } n = 2, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ ,\dfrac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{cases}$$

ahol ω_n jelöli az egység sugarú n-dimenziós gömb felszínét.

   a) Mutassuk meg, hogy $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
   b) Igazoljuk, hogy $\Delta E(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   c) Bizonyítsuk be, hogy $-\Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}^n$-en.