A 4. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ adott.

a) Legyen $\varphi_j(x) := \dfrac{1}{j}\varphi(x)$ $(x \in \Omega, j \in \mathbb{N}^+)$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\varphi_j \to 0$ $\mathscr{D}(\Omega)$-ban!

b) Legyen $\Omega = \mathbb{R}^n$, továbbá $\varphi_j(x) := \dfrac{1}{j}\varphi\left(\dfrac{x}{j}\right)$ $(x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+)$. Konvergens-e a (φ_j) sorozat $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben?

c) Legyen $\Omega = \mathbb{R}^n$, továbbá $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(jx)$ $(x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+)$. Konvergens-e a (φ_j) sorozat $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben?

Megoldás. a) Nyilván $\operatorname{supp}\varphi_j = \operatorname{supp}\varphi$ minden j-re, továbbá minden α multiindex esetén $|\partial^\alpha \varphi_j(x)| = \frac{1}{j}|\partial^\alpha\varphi(x)| \le \frac{1}{j}\max_\Omega |\partial^\alpha\varphi| \to 0$, vagyis $\partial^\alpha\varphi_j \to 0$ egyenletesen Ω-n. Következésképpen $\varphi_j \to 0$ $\mathscr{D}(\Omega)$-ban.

b) Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp}\frac{1}{j}\varphi\left(\frac{\cdot}{j}\right)$ origó középpontú j-szeres nagyítással kapható $\operatorname{supp}\varphi$-ből, így $\operatorname{supp}\varphi \ne \emptyset$ esetén nem létezik K kompakt halmaz, amelyre $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$. Ebből következően a (φ_j) sorozat nem konvergens $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, kivéve a $\varphi \equiv 0$ esetet.

c) Most $\operatorname{supp}\frac{1}{j}\varphi(j\cdot)$ origó középpontú $\frac{1}{j}$-szeres kicsinyítéssel kapható $\operatorname{supp}\varphi$-ből, ezért ha $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R)$, akkor $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B(0,R)$ minden j-re. Ezenkívül $|\varphi_j(x)| \le \frac{1}{j}\max_{\mathbb{R}^n}|\varphi| \to 0$, ezért $\varphi_j \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^n$-en. Viszont $|\alpha| = 1$ esetén $\max_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\varphi_j| = \max_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\varphi|$ csak akkor tart a 0-hoz $j \to \infty$ esetén, ha $\partial^\alpha\varphi \equiv 0$. Következésképpen φ konstans függvény, és mivel kompakt tartójú, ezért csak az azonosan nulla függvény lehet. Vagyis a (φ_j) sorozat csak a triviális $\varphi \equiv 0$ esetben konvergens $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben.

Megjegyezzük, hogy a $\mathscr{D}(\Omega)$ tér bevezetése Laurent-Moise Schwartz (1915–2002) francia matematikus nevéhez fűződik, aki a disztribúcióelmélet kidolgozója is egyben. Az elméletért 1950-ben megkapta az egyik legnagyobb matematikai díjat a Fields-érmet. Saját bevallása szerint a disztribúciók elméletét egy éjszaka alatt „fedezte fel” (az ő szavaival), ez volt élete két legfontosabb napja közül az egyik. A másik, amikor 450 lepkét gyűjtött be (a lepkegyűjtés volt az egyik hobbija).

2. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény.

a) Értelmezzük a $T_f \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen: $T_f(\varphi) := \displaystyle\int_\Omega f\varphi$. Igazoljuk, hogy T_f nulladrendű disztribúció! (T_f az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció.)

b) Legyen $u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, amelyre $u(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f\partial^\beta\varphi$, ahol β adott multiindex. Bizonyítsuk be, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és véges rendű! Meghatározza-e (m. m.) egyértelműen u az f függvényt?

Megoldás. a) T_f nyilván lineáris, továbbá ha $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ kompakt $(K \subset \Omega)$, akkor

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f\varphi\right| = \left|\int_K f\varphi\right| \le \int_K |f\varphi| \le \left(\int_K |f|\right)\cdot \max_K |\varphi|.$$

Ez azt jelenti, hogy T_f nulladrendű disztribúció.

Megjegyezzük, hogy a folytonosságot beláthattuk volna definíció szerint is. Nevezetesen, tegyük fel, hogy $\varphi_j \to \varphi$ a $\mathscr{D}(\Omega)$ térben, ekkor a konvergencia definíciója miatt $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$, másrészt $\varphi_j \to \varphi$ pontonként Ω-n, valamint a (φ_j) sorozat egyenletesen korlátos, és így $f \in L^1(K)$ figyelembe vételével a Lebesgue-tétel alapján

$$T_f(\varphi_j) = \int_\Omega f\varphi_j = \int_K f\varphi_j \to \int_K f\varphi = \int_\Omega f\varphi = T_f(\varphi).$$

b) u linearitása nyilvánvaló, és ha $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ kompakt $(K \subset \Omega)$, akkor

$$|u(\varphi)| = \left|\int_\Omega f\partial^\beta\varphi\right| = \left|\int_K f\partial^\beta\varphi\right| \le \int_K \left|f\partial^\beta\varphi\right| \le \left(\int_K |f|\right)\cdot \max_K \left|\partial^\beta\varphi\right|.$$

Következésképpen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és véges rendű (legfeljebb $|\beta|$ rendű). Legyen most $n = 1$, $\Omega = (a,b)$, valamint $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$, $c \in \mathbb{R}$ és $\beta = 1$. Ekkor minden $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ esetén

$$\int_a^b (f+c)\varphi' = \int_a^b f\varphi' + c\cdot\int_a^b \varphi' = \int_a^b f\varphi' + c(\varphi(b) - \varphi(a)) = \int_a^b f\varphi',$$

hiszen $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $f + c$ és f ugyanazt a disztribúciót határozzák meg. Hasonlóan látható, hogy tetszőleges ($n \ge 1$ és) $|\beta| \ge 1$ multiindex esetén sem határozza meg u az f függvényt. Azonban $|\beta| = 0$ esetén bizonyítható (lásd előadás), hogy ha $T_f = T_g$, akkor $f = g$ (m. m.).

3. Adott $a \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $\delta_a \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, amelyre $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy δ_a nulladrendű disztribúció! (δ_a az a ponthoz tartozó Dirac-delta disztribúció)

b) Bizonyítsuk be, hogy δ_a nem reguláris disztribúció, azaz nem létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, amelyre $\delta_a = T_f$.

Megoldás. a) Nyilván δ_a lineáris, továbbá $|\delta_a(\varphi)| \le \max_K |\varphi|$, ha $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ kompakt. Ebből következően δ_a valóban véges rendű disztribúció.

A folytonosságot beláthattuk volna a sorozatfolytonosság alapján is, nevezetesen, ha $\varphi_j \to \varphi$ a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben, akkor egyenletesen is, ezért pontonként is, speciálisan az a pontban is, tehát $\varphi_j(a) \to \varphi(a)$.

b) Indirekt tegyük fel, hogy létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = \varphi(a)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. Legyen $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a következő függvény:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|a-x|^2}}, & \text{ha } |x| \le a \\ 0, & \text{ha } |x| > a. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (valójában $\psi(x) = \Psi(|a-x|^2)$, ahol $\Psi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $\Psi(r) = e^{-\frac{1}{1-r}}$). Tekintsük a $\varphi_j(x) = \psi(a + j(a-x))$ függvényeket! Világos, hogy $\varphi_j(a) \ne 0$ és $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B\big(a, \frac{1}{j}\big)$, így $\varphi_j(x) \to 0$, ha $x \ne a$. Ezenkívül $|f\varphi_j| \le |f| \cdot \max|\psi| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, így a Lebesgue-tétel miatt $j \to \infty$ esetén

$$1 = \varphi_j(a) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_j \to 0,$$

ami ellentmondás. Megjegyezzük, hogy Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) Nobel-díjas brit fizikus volt a kvantummechanika egyik megalapítója, ő vezette be a róla elnevezett Dirac-delta „függvényt”.

4. Legyen $\Omega = (0, 2)$, és értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$! *Véges rendű-e u?

Megoldás. Legyen $K \subset (0, 2)$ kompakt halmaz. Ekkor létezik N pozitív egész szám, amelyre $\frac{1}{N} \in K$, de $j > N$ esetén $\frac{1}{k} \notin K$. Ekkor $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ esetén

$$|u(\varphi)| = \left|\sum_{j=1}^{N} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right)\right| \le \sum_{j=1}^{N} \max_K \left|\varphi^{(j)}\right|, \tag{1}$$

amiből következően u jól definiált. A linearitás is könnyen látható, hiszen formálisan (tudván, hogy csak véges sok nem nulla tag van az összegben) képezhetjük a két végtelen szumma összegét. Végül a folytonosság a fenti (1) összefüggésből azonnal adódik, tehát u valóban disztribúció.

5. Legyen $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy $|\alpha| \le m$ esetén minden $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-re $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$!

Megoldás. Elegendő belátnunk, hogy $\partial_i u(\varphi) := -u(\partial_i \varphi)$, hiszen ezt egymás után ismételve kapjuk a feladat állítását. Az is világos, hogy mindezt elég ∂_1-re igazolni. Jelölje $x = (x_1, x')$ az $\mathbb{R}^n$ koordinátáit, ahol $x_1 \in \mathbb{R}$ és $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ekkor $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén parciális integrálás segítségével

$$\begin{aligned} T_{\partial_1 f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 f(x_1, x')\varphi(x_1, x')\, dx_1\, dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[f(x_1, x')\varphi(x_1, x')\right]_{x_1=-\infty}^{\infty} dx' - \\ - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x')\partial_1\varphi(x_1, x')\, dx_1\, dx' = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x')\partial_1\varphi(x_1, x')\, dx_1\, dx' = -T_f(\partial_1\varphi) \end{aligned}$$

adódik (felhasználva, hogy φ kompakt tartójú).

6. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és α multiindex. Definiáljuk u deriváltját $\partial^\alpha u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$ módon. Bizonyítsuk be, hogy $\partial^\alpha u$ disztribúció!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy $\partial^\alpha u$ lineáris. Ezenkívül a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia definíciója alapján világosan látható, hogy ha $\varphi_j \to \varphi$ $\mathscr{D}(\Omega)$-ban, akkor $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$ $\mathscr{D}(\Omega)$-ban esetén $\partial^\alpha \varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \partial^\alpha \varphi$, és így u folytonossága miatt $u(\partial^\alpha \varphi_j) \to u(\partial^\alpha \varphi)$, tehát $\partial^\alpha u(\varphi_j) \to \partial^\alpha u(\varphi)$, azaz $\partial^\alpha u$ valóban disztribúció.

7. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$. Hogyan hat egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre $\partial^\alpha \delta_a$?

Megoldás. A 6. feladatban szereplő definíció alapján $\partial^\alpha \delta_a(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_a(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(a)$.

8. Vezessük be a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket: $\operatorname{abs}(x) := |x|$, $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$ és $H(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$ (az úgynevezett Heaviside-függvény). Bizonyítsuk be, hogy

a) $T'_{\mathrm{abs}} = T_{\mathrm{sgn}}$

b) $T'_{\mathrm{sgn}} = 2\delta_0$

c) $T'_H = \delta_0$.

Megoldás. a) Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tetszőleges, ekkor parciális integrálást alkalmazva

$$- T'_{\mathrm{abs}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx =$$

$$= [x\varphi(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx - [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(x)\varphi(x)\,dx = -T_{\mathrm{sgn}}(\varphi).$$

Mivel ez minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén teljesül, ezért $T'_{\mathrm{abs}} = T_{\mathrm{sgn}}$.

b) Az előzőhöz hasonlóan minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$- T'_{\mathrm{sgn}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx = [\varphi(x)]_0^{\infty} - [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} = -2\varphi(0) = -2\delta_0(\varphi).$$

c) A korábbiak mintájára minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$-T'_H(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = [\varphi(x)]_0^{\infty} = -\varphi(0) = -\delta_0(\varphi).$$

Megjegyezzük, hogy Oliver Heaviside (1850–1925) angol villamosmérnök, fizikus és matematikus volt. Leginkább elektromosságtannal foglalkozott, például a Maxwell-egyenletek modern alakját neki köszönhetjük, illetve számos fogalmat e témakörből. A vektoranalízis kidolgozása szintén az ő nevéhez fűződik, ez váltotta fel a Hamilton-féle kvaterniók alkalmazását (és többek között ezáltal vált egyszerűbbé a Maxwell-egyenletek megfogalmazása). Kortársai gyakran kritizálták, mert a precíz bizonyításokkal nem foglalkozott (többek között deriválta a később róla elnevezett Heaviside-függvényt, vagy gondoljunk a parciális törtekre bontás Heaviside-féle „letakarásos” módszerére), de erre ő mindig csak az alábbi idézettel felelt: utasítsak vissza egy finom vacsorát csak azért, mert nem ismerem az emésztés folyamatát?

9. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u' = \delta_{-1} + \delta_1$?

Megoldás. A 8. feladat c) részének mintájára könnyen látható, hogy ha a Heaviside-függvényt eltoljuk úgy, hogy az ugrása a -1 pontba kerüljön, akkor az így kapott H_{-1} függvényre $T'_{H_{-1}} = \delta_{-1}$. Hasonlóan, ha a Heaviside-függvényt „eggyel balra toljuk el”, vagyis az ugrása az 1 pontba kerül, akkor a kapott H_1 függvényre $T'_{H_1} = \delta_1$. A linearitás miatt az $u := T_{H_{-1}} + T_{H_1} = T_{H_{-1}+H_1}$ disztribúcióra $u' = \delta_{-1} + \delta_1$. Gondoljuk meg, hogy

$$H_{-1}(x) + H_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \ x < -1, \\ 1, \text{ ha } \ -1 \le x < 1 \\ 2, \text{ ha } \ x \ge 1. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy általában lépcsősfüggvények (azaz szakaszonként konstans függvények) disztribúció értelemben vett deriváltjai (azaz a hozzájuk tartozó reguláris disztribúció deriváltja) az ugrásokra koncentrált Dirac-delta disztribúcióknak az ugrások nagyságával, mint együtthatókkal vett lineáris kombinációi.

10. Bizonyítsuk be, hogy az $u(x) = H(x)\sin x$ függvény disztribúció értelemben megoldása az $u'' + u = \delta_0$ differenciálegyenletnek ($\mathbb{R}$-en).

Megoldás. Azt kell belátnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén $T''_u(\varphi) + T_u(\varphi) = \delta_0(\varphi)$. Ez valóban teljesül, hiszen

$$T''_u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\sin x \cdot \varphi''(x)\,dx = \int_0^{\infty} \sin x \cdot \varphi''(x) = [\sin x \cdot \varphi'(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \cos x \cdot \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\left[\cos x \cdot \varphi(x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \sin x \cdot \varphi(x)\,dx = \varphi(0) - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\sin x \cdot \varphi(x)\,dx = \delta_0(\varphi) - T_u(\varphi).$$

11. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amelyre $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ ha } \ xy \ge 0, \\ 0, \text{ különben.} \end{cases}$ Adjuk meg a $\partial_{12} T_f$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

Megoldás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, ekkor felhasználva a disztribúciók deriválásának definícióját és figyelembe véve f tartóját kapjuk, hogy

$$\partial_{12} T_f(\varphi) = T_f(\partial_{12}\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\partial_{12}\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(0,0) + \frac{1}{2}\varphi(0,0) = \varphi(0,0) = \delta_{(0,0)}.$$

12. Az n-dimenziós $\tilde{H}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Heaviside-függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } \; x_i \geq 0 \; \text{ minden } \; i = 1, \dots, n\text{-re}, \\ 0, \text{ különben.} \end{cases}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_n \tilde{H} = \delta_0$!

b) Mutassuk meg, hogy $\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_n r = \tilde{H}$, ahol

$$r(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \cdots x_n, \text{ ha } \; x_i \geq 0 \; \text{ minden } \; i = 1, \dots, n\text{-re}, \\ 0, \qquad\qquad \text{különben.} \end{cases}$$

Megoldás. a) Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tetszőleges, ekkor

$$(-1)^n \partial_1 \cdots \partial_n \tilde{H}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x) \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \cdots dx_n =$$
$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[\partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\right]_{x_1=0}^\infty dx_2 \cdots dx_n = -\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n =$$
$$= \ldots = (-1)^n \varphi(0, \dots, 0) = (-1)^n \delta_0(\varphi).$$

b) Az előbbihez hasonlóan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén

$$(-1)^n \partial_1 \cdots \partial_n r(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} r(x) \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1 \cdots x_n \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \cdots dx_n =$$
$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\left[x_1 \ldots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\right]_{x_1=0}^\infty - \int_0^\infty x_2 \cdots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n =$$
$$- \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_2 \cdots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \cdots dx_n = \ldots = (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(x)\, dx =$$
$$= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{H}(x) \varphi(x)\, dx = (-1)^n T_{\tilde{H}}(\varphi).$$

13. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén $u(\varphi) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(0, y)\, dy$. Igazoljuk, hogy

a) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_2 u = \delta_{(0,0)}$,

c) van olyan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, amelyre $u = \partial_1 T_f$.

Megoldás. a) Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ és $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Ekkor (mivel K kompakt, így korlátos, ezért) létezik $R > 0$ úgy, hogy a K halmaz benne van az origó középpontú R sugarú körlapban. Ezért

$$|u(\varphi)| \leq \int_0^\infty |\varphi(0, y)|\, dy \leq \int_0^R \max_K |\varphi|\, dy \leq R \cdot \max_K |\varphi|,$$

vagyis u nulladrendű disztribúció.

b) A deriválás definíciója alapján

$$\partial_2 u(\varphi) = -u(\partial_2 \varphi) = -\int_0^\infty \partial_2 \varphi_(0, y)\, dy = \varphi(0, 0) = \delta_{(0,0)}.$$

c) Vegyük észre, hogy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén minden rögzített y-ra

$$\varphi(0, y) = -\left[\varphi(x, y)\right]_{x=0}^\infty = -\int_0^\infty \partial_x \varphi(x, y)\, dx = -\int_0^\infty H(x) \partial_x(x, y)\, dx,$$

ahol H az egydimenziós Heaviside-függvény. Ennek alapján

$$u(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(0, y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty H(y) \varphi(0, y)\, dy = -\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty H(y) H(x) \partial_x \varphi(x, y)\, dx\, dy = \partial_1 T_f(\varphi),$$

ahol $f(x, y) = H(x)H(y)$, vagyis u az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció.

*14. Az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúcióra $u' = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = c$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal?

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.