

4. feladatsor  
III. éves alkmát parcdiff 2018. tavasz

1. Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tartomány és  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  adott.
  - a) Legyen  $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(x)$  ( $x \in \Omega, j \in \mathbb{N}^+$ ). Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $\varphi_j \rightarrow 0$   $\mathcal{D}(\Omega)$ -ban!
  - b) Legyen  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , továbbá  $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(\frac{x}{j})$  ( $x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+$ ). Konvergencia-e a  $(\varphi_j)$  sorozat  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -ben?
  - c) Legyen  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , továbbá  $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(jx)$  ( $x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+$ ). Konvergencia-e a  $(\varphi_j)$  sorozat  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -ben?
2. Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tartomány és  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  függvény.
  - a) Értelmezzük a  $T_f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionált a következőképpen:  $T_f(\varphi) := \int_{\Omega} f\varphi$ . Igazoljuk, hogy  $T_f$  nulladrendű disztribúció! ( $T_f$  az  $f$  függvényhez tartozó reguláris disztribúció.)
  - b) Legyen  $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , amelyre  $u(\varphi) = \int_{\Omega} f\partial^{\beta}\varphi$ , ahol  $\beta$  adott multiindex. Bizonyítsuk be, hogy  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  és véges rendű! Meghatározza-e (m.m.) egyértelműen  $u$  az  $f$  függvényt?
3. Adott  $a \in \mathbb{R}^n$  esetén legyen  $\delta_a: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , amelyre  $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ .
  - a) Bizonyítsuk be, hogy  $\delta_a$  nulladrendű disztribúció! ( $\delta_a$  az  $a$  ponthoz tartozó Dirac-delta disztribúció)
  - b) Bizonyítsuk be, hogy  $\delta_a$  nem reguláris disztribúció, azaz nem létezik  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  függvény, amelyre  $\delta_a = T_f$ .
4. Legyen  $\Omega = (0, 2)$ , és értelmezzük az  $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Igazoljuk, hogy  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ! \*Véges rendű-e  $u$ ?

5. Legyen  $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$  tetszőleges. Mutassuk meg, hogy  $|\alpha| \leq m$  esetén minden  $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ -re  $T_{\partial^{\alpha}f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T_f(\partial^{\alpha}\varphi)$ !
6. Legyen  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  és  $\alpha$  multiindex. Definiáljuk  $u$  deriváltját  $\partial^{\alpha}u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}u(\partial^{\alpha}\varphi)$  módon. Bizonyítsuk be, hogy  $\partial^{\alpha}u$  disztribúció!
7. Legyen  $a \in \mathbb{R}^n$ . Hogyan hat egy  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  függvényre  $\partial^{\alpha}\delta_a$ ?
8. Vezessük be a következő  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket:  $\text{abs}(x) := |x|$ ,  $\text{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$  és  $H(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$  (az úgynevezett Heaviside-függvény). Bizonyítsuk be, hogy
  - a)  $T'_{\text{abs}} = T_{\text{sgn}}$
  - b)  $T'_{\text{sgn}} = 2\delta_0$
  - c)  $T'_H = \delta_0$ .
9. Van-e olyan  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  disztribúció, amelyre  $u' = \delta_{-1} + \delta_1$ ?
10. Bizonyítsuk be, hogy az  $u(x) = H(x) \sin x$  függvény disztribúció értelemben megoldása az  $u'' + u = \delta_0$  differenciálegyenletnek ( $\mathbb{R}$ -en).
11. Legyen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , amelyre  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } xy \geq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$  Adjuk meg a  $\partial_{12}T_f$  disztribúciót egyszerűbb alakban!
12. Az  $n$ -dimenziós  $\tilde{H}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Heaviside-függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_i \geq 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- a) Bizonyítsuk be, hogy  $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n \tilde{H} = \delta_0$ !
- b) Mutassuk meg, hogy  $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n r = \tilde{H}$ , ahol

$$r(x) = \begin{cases} x_1x_2 \cdots x_n, & \text{ha } x_i \geq 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

13. Legyen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  esetén  $u(\varphi) := \int_0^{+\infty} \varphi(0, y)dy$ . Igazoljuk, hogy
  - a)  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ ,
  - b)  $\partial_2 u = \delta_{(0,0)}$ ,
  - c) van olyan  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ , amelyre  $u = \partial_1 T_f$ .

\*14. Az  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  disztribúcióra  $u' = 0$ . Következik-e ebből, hogy  $u = c$  valamilyen  $c \in \mathbb{R}$  konstanssal?