3. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi másodrendű differenciáloperátorok (hol) milyen típusúak.

   a) $Lu = \partial_x^2 u + 6\partial_{xy} u + \partial_y^2 u$
   b) $Lu = 6\partial_x^2 u + 8\partial_{xy} u + 8\partial_y^2 u + 2\partial_{xz} u + 6\partial_{yz} u + 10\partial_z^2 u$
   c) $Lu = (x+y)\partial_x^2 u + 2\sqrt{xy}\partial_{xy} u + (x+y)\partial_y^2 u$

2. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-on elliptikus, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$-on és $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$-on hiperbolikus. Igaz-e, hogy egy ilyen differenciáloperátor $\{0\} \times \mathbb{R}^+$-on parabolikus?

3. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely $\mathbb{R}^n$ minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus $\mathbb{R}^n$-en.

4. Lehet-e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon folytonos együtthatófüggvényekkel olyan differenciáloperátort megadni, amely az Ω tartomány minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus Ω-n. Mi a helyzet akkor, ha az együtthatófüggvények $\overline{\Omega}$-on folytonosak, és az operátor $\overline{\Omega}$ minden pontjában elliptikus?

5. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor a felső nyílt félsíkban elliptikus, az alsó nyílt félsíkban pedig hiperbolikus legyen.

6. Adjunk meg a, b nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + x^2\partial_{xy} u + y^2\partial_{yx} u + b(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor elliptikus a $B(0,1)$ körlap belsejében és az $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0,2)}$ végtelen körgyűrű belsejében, továbbá hiperbolikus a $B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$ körgyűrű belsejében (ahol $B(0,R)$ jelöli az origó középpontú R sugarú nyílt körlapot a síkon).

7. Transzformáljuk kanonikus alakra a következő másodrendű differenciálegyenleteket!

   a) $4\partial_{xy} u + 2\partial_y u + u = x + y$
   b) $\partial_x^2 u + 2\partial_{xy} u + \partial_y^2 u + \partial_x u + u = x - y$

*8. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u(x,y) - \partial_y^2 u(x,y) - 2\partial_x u(x,y) + u(x,y) &= y \\ u(x,0) &= e^x \\ \partial_y u(x,0) &= e^x + 1 \end{aligned}$$