2. zh (A) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2017. tavasz

1. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = t^2 x^3 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Legyen $g, h \in C^1(\mathbb{R})$ monoton növő függvények. Igaz-e, hogy ekkor a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldására minden rögzített $t > 0$ esetén $x \mapsto u(t,x)$ monoton növő függvény?

3. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, amelyre $p(x) \geq m > 0$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén és $q \in C(\overline{\Omega})$. Definiáljuk az $L \colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátort a következőképpen:

$$D(L) := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \colon u|_{\partial\Omega} + \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}, \quad Lu := -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu.$$

Igazoljuk, hogy ekkor az $L \colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L szigorúan pozitív, azaz $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} > 0$ minden $u \in D(L)$, $u \not\equiv 0$ esetén.

4. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány. Igazoljuk, hogy ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, melyre

$$\begin{cases} \Delta u = u^7 & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

akkor abból következik, hogy $u = 0$ Ω-n.

5. Legyen $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 + 2z & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = 3y. \end{cases}$$

6. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \sin t \sin 3x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin 4x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

7. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = 0,\ u'(a) = 0\}, \quad Lu := -5u'' + u.$$