1. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2017. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,y) = 0, \\ u(x,x) = x^2, \\ u(x,-x) = x^3. \end{cases}$$

2. Adjunk meg az összes olyan pozitív $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\Delta u = 0$ és $\Delta(u^{2017}) = 0$.

3. Adjuk meg a $3y^3\partial_x u(x,y) + x^3\partial_y u(x,y) = -x^4 - 3y^4$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az x tengelyen az x^8 függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = 2x^2$ egyenletű görbe felett és az $y = x^2 - 1$ egyenletű görbe alatt hiperbolikus, továbbá a két görbe között elliptikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = e^{-j^2}\varphi(2j - jx)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^1 \int_0^x xy\varphi(x,y)\,dy\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

   Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Igaz-e, hogy $\partial_{12} u$ reguláris disztribúció?

7. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2x)\,dx$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén?

1. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2017. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,y) = 0, \\ u(x,x) = x^2, \\ u(x,-x) = x^3. \end{cases}$$

2. Adjunk meg az összes olyan pozitív $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\Delta u = 0$ és $\Delta(u^{2017}) = 0$.

3. Adjuk meg a $3y^3\partial_x u(x,y) + x^3\partial_y u(x,y) = -x^4 - 3y^4$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az x tengelyen az x^8 függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = 2x^2$ egyenletű görbe felett és az $y = x^2 - 1$ egyenletű görbe alatt hiperbolikus, továbbá a két görbe között elliptikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = e^{-j^2}\varphi(2j - jx)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^1 \int_0^x xy\varphi(x,y)\,dy\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

   Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Igaz-e, hogy $\partial_{12} u$ reguláris disztribúció?

7. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2x)\,dx$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén?