1. zh (A) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2017. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy} u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \\ u(0,y) = 4y^2. \end{cases}$$

2. Adjunk meg legalább másodfokú kétváltozós P, Q polinomokat úgy, hogy $\Delta P = 0$, $\Delta Q = 0$ és $\Delta(PQ) = 0$.

3. Adjuk meg az $y\partial_x u(x,y) + x^3 \partial_y u(x,y) = \frac{1}{2}x^3$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az x tengelyen x^4 függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + x\partial_{xy} u + y\partial_{yx} u + b(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $x = -y-1$ és $x = -y+1$ egyenletű egyenesek közötti nyílt sávban elliptikus, a sávon kívüli nyílt félsíkokban hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = \varphi(x^2 + 2017j)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^1 \int_0^x \varphi(x,y)\,dy\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Mutassuk meg, hogy $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$!

7. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt, hogy egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényhez létezzen $\Psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, amelyre $\Psi' = \varphi$.

1. zh (A) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2017. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy} u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \\ u(0,y) = 4y^2. \end{cases}$$

2. Adjunk meg legalább másodfokú kétváltozós P, Q polinomokat úgy, hogy $\Delta P = 0$, $\Delta Q = 0$ és $\Delta(PQ) = 0$.

3. Adjuk meg az $y\partial_x u(x,y) + x^3 \partial_y u(x,y) = \frac{1}{2}x^3$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az x tengelyen x^4 függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + x\partial_{xy} u + y\partial_{yx} u + b(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $x = -y-1$ és $x = -y+1$ egyenletű egyenesek közötti nyílt sávban elliptikus, a sávon kívüli nyílt félsíkokban hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = \varphi(x^2 + 2017j)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^1 \int_0^x \varphi(x,y)\,dy\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Mutassuk meg, hogy $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$!

7. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt, hogy egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényhez létezzen $\Psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, amelyre $\Psi' = \varphi$.