A 9. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Feladat. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Értelmezzük a $P\colon W^{1,p}(a,b) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ kiterjesztési operátort a következőképpen:

$$(Pu)(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a-1, \\ u(a)(x-a+1), & \text{ha } a-1 < x < a, \\ u(x), & \text{ha } a < x < b, \\ u(b)(b+1-x), & \text{ha } b < x < b+1. \\ 0, & \text{ha } b+1 < x. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $P\colon W^{1,p}(a,b) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ korlátos lineáris operátor, amelyre minden $u \in W^{1,p}(a,b)$ esetén $(Pu)(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus (a-1, b+1)$.

Megoldás. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a 8. feladatsor 4. Feladata alapján minden $W^{1,p}(a,b)$-beli függvény folytonos, sőt abszolút folytonos. A feladatban szereplő Pu kiterjesztett függvény folytonos, (a,b)-n kívül lineáris, tehát abszolút folytonos, illetve $(a-1,b+1)$-en kívül 0-val egyenlő. Ebből következően a kiterjesztett függvény folytonos és szakaszonként abszolút folytonos, tehát az egész számegyenesen abszolút folytonos. A m. m. értelmezett klasszikus deriváltja

$$(Pu)'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a-1, \\ u(a), & \text{ha } a-1 < x < a, \\ u'(x), & \text{ha } a < x < b, \\ -u(b), & \text{ha } b < x < b+1. \\ 0, & \text{ha } b+1 < x, \end{cases}$$

tehát $(Pu)' \in L^p(\mathbb{R})$, és így $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. A P operátor linearitása nyilvánvaló, a korlátossághoz pedig vegyük észre, hogy $p \neq \infty$ esetén

$$\begin{aligned} &\|Pu\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}} = \\ &= \int_{a-1}^a |u(a)(x-a+1)|^p\,dx + \int_a^b |u|^p + \int_b^{b+1} |u(b)(b+1-x)|^p\,dx + \\ &\quad + \int_{a-1}^a |u(a)|^p + \int_a^b |u'|^p + \int_b^{b+1} |u(b)|^p \le \\ &\le 2(|u(a)|^p + |u(b)|^p) + \|u\|^p_{W^{1,p}(a,b)} \le \\ &\le 4\|u\|^p_{L^\infty(a,b)} + \|u\|^p_{W^{1,p}(a,b)}, \end{aligned}$$

és így a 8. feladatsor 1. Feladatának figyelembe vételével

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(a,b)} \le \text{const} \cdot \|u\|_{W^{1,p}(a,b)}.$$

A $p = \infty$ esetben pedig

$$\|Pu\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})} = \|Pu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|(Pu)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^\infty(a,b)} + \|u'\|_{L^\infty(a,b)} = \|u\|_{W^{1,\infty}(a,b)(a,b)}.$$

2. Feladat. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Igaz-e, hogy

a) ha egy $(u_j) \subset W^{1,p}(a,b)$ sorozat konvergens a $W^{1,p}(a,b)$ tér normája szerint, akkor egyenletesen is konvergens?

b) ha egy $(u_j) \subset W^{1,p}(a,b)$ sorozat egyenletesen konvergens, akkor a $W^{1,p}(a,b)$ tér normája szerint is konvergens?

Megoldás.

a) A 8. feladatsor 2. Feladata szerint a $W^{1,p}(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$ beágyazás folytonos, következésképpen minden, $W^{1,p}(a,b)$-ben konvergens sorozat $C([a,b])$-ben is konvergens, tehát egyenletesen is.

b) A válasz: nem feltétlenül. Legyen ugyanis az u_j függvény értéke 0 az $[a, a+2/j]$ intervalumon kívül, az $[a, a+2/j]$ intervallum végpontjaiban 0, a felezőpontjában $1/j^{1/q}$ (ahol $1/p + 1/q = 1$), a két részintervallumon pedig lineáris („sátortető"). Ekkor $\|u_j\|_{C([a,b])} = 1/j^{1/q} \to 0$, azaz (u_j) a konstans 0 függvényhez egyenletesen konvergál. Másrészt viszont, u általánosított deriváltja megegyezik a töréspontok kivételével létező klasszikus deriválttal, amelyre az $[a, a + 2/j]$ intervallumon $|u_j'| = j^{1-1/q} = j^{1/p}$ m. m., ezért $p \neq \infty$ esetén

$$\|u_j\|_{W^{1,p}(a,b)} \geq \|u_j'\|_{L^p(a,a+2/j)} = 2,$$

a $p = \infty$ esetben pedig

$$\|u_j\|_{W^{1,\infty}(a,b)} \geq \|u_j'\|_{L^\infty(a,a+2/j)} = j^{1/p} \geq 1,$$

tehát (u_j) nem konvergál a konstans 0 függvényhez a $W^{1,p}(a,b)$ norma szerint, más függvényhez pedig ugyancsak nem konvergálhat, hiszen akkor ahhoz egyenletesen is tartana az a) rész alapján.

3. Feladat. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Igazoljuk, hogy létezik $C > 0$ (csak a-tól és b-től függő) konstans, hogy minden $u \in W^{1,p}(a,b)$ esetén

$$\left\| u - \frac{1}{b-a} \int_a^b u \right\|_{L^p(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^p(a,b)}.$$

Megoldás. Legyen $u \in W^{1,p}(a,b)$ adott függvény, ekkor léteznek $u_j \subset C^\infty([a,b])$ függvények, amelyekre $u_j \to u$ a $W^{1,p}(a,b)$ tér normája szerint. Az integrálszámítás első középértéktétele szerint létezik olyan $\xi_j \in [a,b]$, hogy

$$u_j(\xi_j) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u_j.$$

(Valójában nincs szükség a közelítő (u_j) sorozatra, mert használhatjuk a 8. feladatsor 4. Feladatának eredményét, vagyis u folytonosságát, így minden igaz u_j helyett u-ra is.) Ekkor a Newton–Leibniz-tétel alapján $x \in [a,b]$ esetén

$$u_j(x) = u_j(\xi_j) + \int_\xi^x u_j'.$$

Ebből következően a Hölder-egyenlőtlenség figyelembe vételével

$$|u_j(x) - u_j(\xi_j)|^p \leq \left(\int_a^b |u_j'| \right)^p \leq \int_a^b |u_j'|^p \left(\int_a^b 1 \right)^{\frac{p}{q}},$$

tehát

$$\left\| u_j - \frac{1}{b-a} \int_a^b u_j \right\|_{L^p(a,b)}^p \leq \mathrm{const} \cdot \|u_j'\|_{L^p(a,b)}^p,$$

ahonnan a $j \to \infty$ határátmenet elvégzése után a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Az integrálszámítás első középértéktételének kissé trükkös alkalmazása helyett oskodhattunk volna egyszerűen a következőképpen:

$$\begin{aligned} u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y)\,dy &= \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)\,dy - \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y)\,dy = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (u(x) - u(y)\,dy = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_y^x u'(z)\,dz\,dy, \end{aligned}$$

így

$$\left| u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y)\,dy \right| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^b |u'(z)|\,dz\,dy \leq \int_a^b |u'(z)|\,dz.$$

ahonnan a bizonyítás a korábbihoz hasonlóan fejezhető be.

4. Feladat. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ha $V \subset W^{1,p}(a,b)$ az alábbi alterek valamelyike, akkor létezik $C > 0$ (csak a-tól és b-től függő) konstans, hogy minden $u \in V$ esetén $\|u\|_{L^p(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^p(a,b)}$.

a) $V := \left\{ u \in W^{1,p}(a,b) : \int_a^b u = 0 \right\}$;

b) $V := W_0^{1,p}(a,b)$;

c) $V := \{u \in W^{1,p}(a,b) : u(c) = 0\}$, ahol $c \in [a,b]$ rögzített.

Igaz-e az állítás $V := \{u \in W^{1,p}(a,b) : u(a) = u(b)\}$ esetén?

Megoldás.
a) A 3. Feladatból következően V-ben $\|u\|_{L^p(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^p(a,b)}$.
b) Speciális esete a c) résznek.
c) A 3. Feladat bizonyításához hasonlóan járhatunk el. Legyen $u \in V$ adott függvény, ekkor léteznek $u_j \subset C^\infty([a,b])$ függvények, amelyekre $u_j \to u$ a $W^{1,p}(a,b)$ tér normája szerint és így egyenletesen is a 2. feladat a) része szerint. Ekkor a Newton–Leibniz-tétel alapján $x \in [a,b]$ esetén

$$u_j(x) = u_j(c) + \int_c^x u_j'.$$

Ebből következően a Hölder-egyenlőtlenség figyelembe vételével

$$|u_j(x) - u_j(c)|^p \leq \left(\int_a^b |u_j'|\right)^p \leq \int_a^b |u_j'|^p \left(\int_a^b 1\right)^{\frac{p}{q}},$$

amelyből a határátmenet elvégzésével kapjuk, hogy

$$|u(x) - u(c)|^p \leq \text{const} \cdot \|u'\|^p_{L^p(a,b)},$$

így $u(c) = 0$ felhasználásával integrálás után a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik.

5. Feladat. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Bizonyítsuk be, hogy minden $u \in H_0^1(a,b)$ esetén

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{b-a}{\pi}\|u'\|_{L^2(a,b)}.$$

Igazoljuk, hogy a $(b-a)/\pi$ konstans nem javítható. Mutassuk meg, hogy fordított egyenlőtlenség semmilyen konstanssal sem teljesülhet minden $u \in H_0^1(a,b)$ esetén.

Megoldás. Fourier-sorok segítségével fogunk bizonyítani, így az egyszerűeég kedvéért transzformáljuk az egyenlőtlenséget a $[0,\pi]$ intervallumra. Elég belátni, hogy

$$\int_0^\pi |u|^2 \leq \int_0^\pi |u'|^2,$$

hiszen ekkor

$$\begin{aligned}
\int_a^b |u(x)|^2\,dx &= \frac{b-a}{\pi}\int_0^\pi \left|u\left(a + y\frac{b-a}{\pi}\right)\right|^2 dy \\
&\leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi \left|u'\left(a + y\frac{b-a}{\pi}\right)\right|^2 dy \\
&= \frac{b-a}{\pi}\int_0^\pi |u'(x)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Az $u \in H_0^1(0,\pi)$ függvényt fejtsük sorba az $e_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin jx$ $(j = 1, 2\ldots)$ szinuszrendszer szerint:

$$u(x) = \sum_{j=1}^\infty c_j e_j,$$

ahol

$$c_j = \int_0^\pi u e_j,$$

továbbá a konvergencia $L^2(0,\pi)$ normában értendő. Az $u' \in L^2(0,\pi)$ függvényt fejtsük sorba a $h_0(x) = 1/\pi$, $h_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos jx$ $(j = 1, 2\ldots)$ koszinuszrendszer szerint:

$$u'(x) = \sum_{j=1}^\infty d_j h_j,$$

ahol

$$d_j = \int_0^\pi u h_j,$$

továbbá a konvergencia $L^2(0,\pi)$ normában értendő. Állítjuk, hogy $d_0 = 0$, valamint $d_k = kc_k$, ha $k \ge 1$. Valóban, $u \in H_0^1(0,\pi)$ esetén $u(0) = u(\pi) = 0$, így a 8. feladatsor 3. Feladata alapján

$$d_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi u' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(u(\pi) - u(0)) = 0.$$

Másfelől pedig az $u \in H_0^1(0,\pi)$ függvényhez definíció szerint létezik $(u_j) \subset C_0^\infty(0,\pi)$ függvénysorozat (itt használtuk, hogy $u \in H_0^1(a,b)$), amely $H_0^1(0,\pi)$ normában tart u-hoz. Ekkor parciális integrálást végrehajtva

$$\int_0^\pi u_j(x) \cos kx \, dx = k \int_0^\pi u_j'(x) \sin kx \, dx,$$

amelyből $j \to \infty$ határárátmenettel (és $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$-vel való beszorzás után) $d_k = kc_k$ adódik (természetesen egyszerűen hivatkozhattunk volna a 8. feladatsor 9. Feladatára is). Ezt felhasználva a Parseval-egyenlőség folytán

$$\|u'\|_{L^2(0,\pi)}^2 = \sum_{k=1}^\infty |d_k|^2 = \sum_{k=1}^\infty k^2 |c_k|^2 \ge \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|u\|_{L^2(0,\pi)}^2,$$

amely éppen a kívánt egyenlőtlenség. A fenti becslésből az is világosan látszik, hogy egyenlőség is teljesülhet, amennyiben $c_2 = c_3 = \cdots = 0$, azaz $u(x) = \sin x$. Sőt, az $u_k(x) := \sin kx$ függvényeket tekintve

$$\int_0^\pi |u_k'|^2 = k^2 \int_0^\pi \cos^2 kx \, dx = k^2 \int_0^\pi \sin^2 kx \, dx = k^2 \int_0^\pi |u_k|^2,$$

amiből azonnal látszik, hogy nincs olyan $c > 0$ konstans, amelyre

$$\int_0^\pi |u'|^2 q \le c \int_0^\pi |u|^2,$$

teljesülne minden $u \in H_0^1(0,\pi)$ esetén. Visszatranszformálva az (a,b) intervallumra, az eredeti egyenlőtlenségben $u(x) = \sin\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right)$ esetén van egyenlőség.

6. Feladat. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Tekintsük a $H^1(a,b)$ Hilbert-teret a szokásos $\langle u, v\rangle = \int_a^b (uv + u'v')$ skalárszorzattal. Mi az alábbi $V \subset H^1(a,b)$ alterek merőleges kiegészítője a $H^1(a,b)$ térben?

a) $V := H_0^1(a,b)$;

b) $V := \{u \in H^1(a,b) : u(a) = 0\}$;

c) $V := \{u \in H^1(a,b) : u(a) = u(b)\}$.

Megoldás.

a) Legyen $u \in H^1(a,b)$ olyan, hogy $u \perp H_0^1(a,b)$, ami a $C_0^\infty(a,b)$ tér $H_0^1(a,b)$-beli sűrűsége miatt ekvivalens azzal, hogy minden $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ esetén $(u,\varphi)_{H^1(a,b)} = 0$, azaz

$$\int_a^b (u\varphi + u'\varphi') = 0.$$

Innen átrendezéssel

$$\int_a^b u'\varphi' = -\int_a^b u\varphi,$$

adódik, ami pontosan azt jelenti, hogy az $u' \in L^2(a,b)$ függvénynek létezik az általánosított deriváltja, és az megegyezik u-val, amely $H^1(a,b)$-ben van. Ebből következően $u \in H^3(a,b)$, így a 8. feladatsor 5. Feladata alapján $u'' \in C([a,b])$, tehát $u \in C^2([a,b])$, vagyis az általánosított derivált valójában klasszikus derivált, amelyre $u'' = u$ teljesül. A közönséges differenciálegyenletek elméletéből jól ismert, hogy az előbbi egyenletet kielégítő összes $u \in C^2([a,b])$ függvény előáll $u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ alakban. Összefoglalva tehát, a $H_0^1(a,b)$ ortogonális kiegészítője a $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ alakú függvények által generált kétdimenziós altér.

b) Mivel $H_0^1(a,b) \subset \{u \in H^1(a,b)(a,b) : u'(a) = 0\}$, ezért V merőleges kiegészítője része a $H_0^1(a,b)$ altér merőleges kiegészítőjének, tehát $u \in C^2([a,b])$ és $u'' = u$. Világos, hogy $\{\psi \in C^\infty([a,b]) : \psi(a) = 0\} \subset V$, így minden ilyen ψ függvényre

$$\int_a^b (u\psi + u'\psi') = 0.$$

Parciális integrálást végrehajtva:

$$0 = \int_a^b (u - u'')\psi + u'(b)\psi(b) = u'(b)\psi(b),$$

ahonnan $u'(b) = 0$ következik (valójában ψ helyett a V altér tetszőleges elemére érvényes az előbbi összefüggés, hiszen a8. feladatsor 3. és 9. feladatai alapján $H^1(a,b)$-ben érvényes a parciális integrálás). Ennek alapján a $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ függvények közül azokat kell kiválasztanunk, amelyekre $u'(b) = 0$, így

$$u(x) = c\left(e^{x-b} + e^{-(x-b)}\right).$$

c) A b) részhez hasonlóan $H_0^1(a,b) \subset \left\{u \in H^1(a,b)(a,b) : u(a) = u(b)\right\}$, ezért V merőleges kiegészítője része a $H_0^1(a,b)$ altér merőleges kiegészítőjének, tehát $u \in C^2([a,b])$ és $u'' = u$. Világos, hogy $\{\psi \in C^\infty([a,b]) : \psi(a) = \psi(b)\} \subset V$, így minden ilyen ψ függvényre

$$\int_a^b (u\psi + u'\psi') = 0.$$

Parciális integrálást végrehajtva:

$$0 = \int_a^b (u - u'')\psi + (u'(b) - u'(a))\psi(b),$$

ahonnan $u'(b) = u'(a)$ következik (valójában ψ helyett a V altér tetszőleges elemére érvényes az előbbi összefüggés, hiszen a8. feladatsor 3. és 9. feladatai alapján $H^1(a,b)$-ben érvényes a parciális integrálás). Ennek alapján a $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ függvények közül azokat kell kiválasztanunk, amelyekre $u'(b) = u'(a)$, így

$$u(x) = c\left(e^{x-a-b} + e^{-(x-a-b)}\right).$$