

9. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Értelmezzük a $P: W^{1,p}(a, b) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ kiterjesztési operátort a következőképpen:

$$(Pu)(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a - 1, \\ u(a)(x - a + 1), & \text{ha } a - 1 < x < a, \\ u(x), & \text{ha } a < x < b, \\ u(b)(b + 1 - x), & \text{ha } b < x < b + 1. \\ 0, & \text{ha } b + 1 < x. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $P: W^{1,p}(a, b) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ korlátos lineáris operátor, amelyre minden $u \in W^{1,p}(a, b)$ esetén $(Pu)(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus (a - 1, b + 1)$.

2. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Igaz-e, hogy
- ha egy $(u_j) \subset W^{1,p}(a, b)$ sorozat konvergens a $W^{1,p}(a, b)$ tér normája szerint, akkor egyenletesen is konvergens?
 - ha egy $(u_j) \subset W^{1,p}(a, b)$ sorozat egyenletesen konvergens, akkor a $W^{1,p}(a, b)$ tér normája szerint is konvergens?
3. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Igazoljuk, hogy létezik $C > 0$ (csak a -tól és b -től függő) konstans, hogy minden $u \in W^{1,p}(a, b)$ esetén

$$\left\| u - \frac{1}{b-a} \int_a^b u \right\|_{L^p(a,b)} \leq C \|u'\|_{L^p(a,b)}.$$

4. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ha $V \subset W^{1,p}(a, b)$ az alábbi alterek valamelyike, akkor létezik $C > 0$ (csak a -tól és b -től függő) konstans, hogy minden $u \in V$ esetén $\|u\|_{L^p(a,b)} \leq C \|u'\|_{L^p(a,b)}$.
- $V := \left\{ u \in W^{1,p}(a, b) : \int_a^b u = 0 \right\}$;
 - $V := W_0^{1,p}(a, b)$;
 - $V := \left\{ u \in W^{1,p}(a, b) : u(c) = 0 \right\}$, ahol $c \in [a, b]$ rögzített.

Igaz-e az egyenlőtlenség $V := \left\{ u \in W^{1,p}(a, b) : u(a) = u(b) \right\}$ esetén?

5. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Bizonyítsuk be, hogy minden $u \in H_0^1(a, b)$ esetén

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{b-a}{\pi} \|u'\|_{L^2(a,b)}.$$

Igazoljuk, hogy a $(b-a)/\pi$ konstans nem javítható. Mutassuk meg, hogy fordított egyenlőtlenség semmilyen konstanssal sem teljesülhet minden $u \in H_0^1(a, b)$ esetén.

6. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Tekintsük a $H^1(a, b)$ Hilbert-teret a szokásos $\langle u, v \rangle = \int_a^b (uv + u'v')$ skalárszorzattal. Mi az alábbi $V \subset H^1(a, b)$ alterek merőleges kiegészítője a $H^1(a, b)$ térben?
- $V := H_0^1(a, b)$;
 - $V := \left\{ u \in H^1(a, b) : u(a) = 0 \right\}$;
 - $V := \left\{ u \in H^1(a, b) : u(a) = u(b) \right\}$.