A 7. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

Több feladat megoldása során is használni fogjuk a Szoboljev-térbeli függvényekre vonatkozó kiterjesztési tételt, ezért az alábbiakban emlékeztetünk a kapcsolódó eredményekre.

1. Tétel (Kiterjesztési tétel). *Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek pereme k-szor folytonosan differenciálható, továbbá legyen K tetszőleges kompakt halmaz, amelyre $\overline{\Omega} \subset K$. Ekkor létezik*

$$P : H^k(\Omega) \to H^k(\mathbb{R}^n)$$

korlátos lineáris kiterjesztési operátor *úgy, hogy minden $u \in H^k(\Omega)$ esetén $Pu = u$ m.m. az Ω halmazon, továbbá $Pu = 0$ m.m az $\mathbb{R}^n \setminus K$ halmazon. Sőt, $u \in C(\overline{\Omega})$ esetén $Pu \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Megjegyzés.* A P kiterjesztési operátor korlátossága azt jelenti, hogy létezik egy $C > 0$ konstans, amely csak a Ω, K halmazoktól és a p kitevőtől függ úgy, hogy minden $u \in H^1(\Omega)$ esetén

$$\|Pu\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Egydimenzióban a kiterjesztési tétel egyszerűen bizonyítható, felhasználva a $H^k(a,b)$ térbeli függvények folytonossági és differenciálhatósági tulajdonságait, lásd a 4. feladatsor 5. Feladatát.

1. Feladat. Legyen k nemnegatív egész szám. Igazoljuk, hogy ekkor

a) egy $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ függvény pontosan akkor van a $H^k(\mathbb{R}^n)$ térben, ha

$$\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} (\mathscr{F}u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n);$$

b) létezik $C > 0$ konstans, hogy

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} (\mathscr{F}u)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}.$$

Megoldás. Definíció szerint $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ azt jelenti, hogy minden $|\alpha| \leq k$ multiindex esetén $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mivel a Fourier-transzformáció az $L^2(\mathbb{R}^n)$ téren egy unitér operátor, így az előbbi ekvivalens azzal, hogy minden $|\alpha| \leq k$ multiindexre $\mathscr{F}(\partial^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ezenkívül

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathscr{F}(\partial^\alpha u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\xi^\alpha \mathscr{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

amiből következően

$$\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\xi^\alpha \mathscr{F}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \, |(\mathscr{F}u)(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi|^{2|\alpha|} \leq c_1(1 + |\xi|^{2k}) \leq c_1(1 + |\xi|^2)^k,$$

másrészt pedig

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \geq 1 + \xi_1^{2k} + \cdots + \xi_k^{2k} \geq 1 + c_2(\xi_1^2 + \cdots + \xi_k^2)^k \geq c_3(1 + |\xi|^{2k}) \geq c_4(1 + |\xi|^2)^k,$$

ezért az (1) összefüggés alapján

$$C_2\|(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} (\mathscr{F}u)(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} (\mathscr{F}u)(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

2. *Megjegyzés.* A fenti összefüggés következményeként a $H^k(\mathbb{R}^n)$ térben az alábbi, az eredeti normával ekvivalens új normát vezethetjük be:

$$\|u\|^*_{H^k(\mathbb{R}^n)} := \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} (\mathscr{F}u)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Általában tetszőleges $s \geq 0$ esetén értelmezhetjük azon $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ függvények terét, amelyre

$$\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\mathscr{F}u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Ezt szokás $H^s(\mathbb{R}^n)$ térnek nevezni (törtrendű Szoboljev-tér), amely könnyen láthatóan Banach-tér az

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\mathscr{F}u)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

normával.

2. Feladat. Milyen $s \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy az alábbi függvények a $H^s(\mathbb{R})$ térben vannak?

a) $\chi_{[-1,1]}$;

b) $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} * \cdots * \chi_{[-1,1]}$, ahol a konvolúció k tényezőből áll;

c) $e^{-|x|}$.

Megoldás. A 2. Megjegyzés alapján azt kell ellenőriznünk, hogy

$$\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\mathscr{F}\chi_{[-1,1]})(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

A 2. feladatsor 4. Feladatának e) része alapján $\mathscr{F}(\chi_{[-1,1]}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}$, tehát

$$\left|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\mathscr{F}\chi_{[-1,1]})(\xi)\right|^2 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{(1+\xi^2)^{2s}\sin^2\xi}{\xi^2},$$

amely folytonos függvény. Ebből következően az

$$\left|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\mathscr{F}\chi_{[-1,1]})(\xi)\right|^2 \tag{2}$$

függvény $\mathbb{R}$-en való integrálhatósága csak a végtelenben kérdéses. Mivel $s \geq \frac{1}{2}$ esetén

$$\frac{(1+\xi^2)^s\sin^2\xi}{\xi^2} \geq \frac{\sin^2\xi}{\xi},$$

amely könnyen láthatóan nem integrálható függvény, így ekkor a (2) függvény sem integrálható. Másrészt viszont $s < \frac{1}{2}$ esetén

$$\frac{(1+\xi^2)^s\sin^2\xi}{\xi^2} \leq \frac{2^s}{\xi^{2s-2}},$$

amely integrálható. Mindezek alapján $\chi_{[-1,1]} \in H^s(\mathbb{R})$ pontosan akkor, ha $s < \frac{1}{2}$.

3. Feladat. Legyenek $n \geq 1$, $k > \frac{n}{2}$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $H^k(\mathbb{R}^n) \subset C_b^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)$, továbbá a beágyazás operátora korlátos.

Megoldás. Az 1. Feladat alapján $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ esetén $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ekkor minden $m \leq k - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ nemnegatív egész számra $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Valóban, a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\begin{aligned}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{1+\left[\frac{n}{2}\right]}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{1+\left[\frac{n}{2}\right]}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot \|(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty,\end{aligned} \tag{3}$$

hiszen $(1+|\xi|^2)^{-\frac{1+\left[\frac{n}{2}\right]}{2}} \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Speciálisan $m=0$ esetén $\mathscr{F}u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, így

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}u)(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi.$$

A paraméteres integrálok folytonosságáról és differenciálhatóságáról szóló tételből következően $u \in C(\mathbb{R}^n)$, továbbá minden $|\alpha| \leq k - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ multiindex esetén

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\mathscr{F}u)(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi, \tag{4}$$

mert (3) alapján $\xi \mapsto \xi^\alpha(\mathscr{F}u)(\xi)$ integrálható függvény, ezért az integrandusnak van integrálható majoránsa. Következésképpen $\partial^\alpha u \in C(\mathbb{R}^n)$, tehát $u \in C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)$. Már csak annyit kell belátnunk, hogy $\partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ehhez vegyük észre, hogy (4) és (3) alapján

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{|\alpha|}|(\mathscr{F}u)(\xi)|\,d\xi \leq C\|(1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

amiből a $H^k(\mathbb{R}^n) \subset C_b^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)$ beágyazás korlátossága is következik.

4. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány ($n \geq 1$), továbbá $k > \frac{n}{2}$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) $H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\Omega)$;

b) ha Ω pereme k-szor folytonosan differenciálható, akkor $H^k(\Omega) \subset C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{\Omega})$, továbbá a beágyazás operátora korlátos.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $u \in H^k_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, azaz tetszőleges $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ esetén $\varphi u \in H^k_0(\Omega)$ (vagy fogalmazhatnánk úgy is, hogy $u|_K \in H^k(K)$ minden $K \subset \Omega$ kompakt halmaz esetén). Legyen $x_0 \in \Omega$ adott, és válasszunk egy $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ függvényt, amely az x_0 egy környezetében 1-gyel egyenlő (ilyen függvény van, lásd az 1. feladatsor megoldásának 1. Megjegyzését). Ekkor $\varphi u = u$ az x_0 egy környezetében, továbbá $\varphi u \in H^k_0(\Omega)$, így a 3. Feladat alapján $\varphi u \in C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)$ (az Ω tartományon kívülre 0-ként kiterjesztve). Következésképpen u az x_0 pontban $k - \left[\frac{n}{2}\right] - 1$-szer folytonosan differenciálható.

Legyen most $u \in H^k(\Omega)$, ekkor az 1. Tétel alapján létezik $\tilde{u} \in H^k(\mathbb{R}^n)$ kiterjesztése az u függvénynek, amelyre

$$\|\tilde{u}\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

A 3. Feladat alapján $\tilde{u} \in C_b^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)$, továbbá

$$\|\tilde{u}\|_{C_b^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|\tilde{u}\|_{H^k(\mathbb{R}^n)},$$

így $u \in C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{\Omega})$ és

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{\Omega})} \leq \|\tilde{u}\|_{C_b^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 C_2 \|u\|_{H^k(\Omega)},$$

tehát $H^k(\Omega) \subset C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{\Omega})$, továbbá a beágyazás operátora korlátos.

Megjegyezzük, hogy $n = 1$ esetén a tartomány peremének simaságára nincs szükség (valójában nincs is értelme), tetszőleges nyílt intervallumra igaz az állítás, hiszen a kiterjesztési tétel érvényben is marad.

Megemlítjük, hogy a beágyazási tétel általános formája a következő.

2. Tétel (Beágyazási tétel)**.** *Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és a pereme folytonosan differenciálható, továbbá legyen $u \in W^{k,p}(\Omega)$, ahol $1 \leq p < \infty$. Ekkor*

(i) ha $k < \frac{n}{p}$, akkor $u \in L^{p^*}(\Omega)$, ahol $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (p^* az úgynevezett Szoboljev-kitevő), és a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ beágyazás korlátos.

(ii) ha $k > \frac{n}{p}$, akkor $u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, ahol

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{ha } \frac{n}{p} \text{ nem egész,} \\ \text{tetszőleges, 1-nél kisebb szám, ha } \frac{n}{p} \text{ egész,} \end{cases}$$

továbbá a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ beágyazás folytonos.

A beágyazási tételek esetében a $W^{k,p}(\Omega) \subset C^\ell(\Omega)$ típusú tartalmazásokat mindig úgy értjük, hogy egy $u \in W^{k,p}(\Omega)$ függvényt egy nullmértékű halmazon megváltoztatva egy $u \in C^\ell(\Omega)$ függvényt kapunk.

5. Feladat. Legyen $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^r\}$, és tekintsük az $u(x,y) := x^{-\varepsilon/p}$ ($(x,y) \in \Omega$) függvényt, ahol $r > 1$, $2 < p < r+1$, és $0 < \varepsilon < r+1-p$. Mutassuk meg, hogy ekkor $u \in W^{1,p}(\Omega)$, de $u \notin C(\overline{\Omega})$.

Megoldás. Az u függvény klasszikus értelemben folytonosan differenciálható Ω-n, $\partial_x u(x,y) = -\frac{\varepsilon}{p} x^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}$, $\partial_y u = 0$. Ezenkívül

$$\int_\Omega |\partial_x u|^p = \frac{\varepsilon^p}{p^p} \int_0^1 \int_{-x^r}^{x^r} x^{-\varepsilon-p}\, dy\, dx = 2\frac{\varepsilon^p}{p^p} \int_0^1 x^{-\varepsilon-p+1}\, dx,$$

amely véges hiszen $-\varepsilon - p + 1 > -1$. Ebből következően $\partial_x u \in L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, ezért az általánosított derivált megegyezik az Ω-n mindenütt létező folytonos deriválttal. Másrészt

$$\int_\Omega |u|^p = \int_0^1 \int_{-x^r}^{x^r} x^{-\varepsilon}\, dy\, dx = 2\int_0^1 x^{r-\varepsilon}\, dx,$$

amely ugyancsak véges, mert $r - \varepsilon > p - 1 > 1$. Mindezek alapján $u \in W^{1,p}(\Omega)$ következik. Végül pedig vegyük észre, hogy $u \notin L^\infty(\Omega)$, hiszen a 0 környezetében nem korlátos, így $u \notin C(\overline{\Omega})$.

A feladatbeli függvényre $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, ugyanakkor $u \notin C^0(\overline{\Omega})$, ami azt mutatja, hogy a 2. Tételben Ω peremének simasága szükséges feltétel, hiszen $n = 2$, $p > 2$ és $k = 1$, ezért $k > \frac{n}{p}$ miatt $W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \subset C^0(\overline{\Omega})$ kellene, hogy teljesüljön. Megjegyezzük, hogy a feladatban szereplő tartománynak úgynevezett *cusp* szingularitása van, a beágyazási tétel „megmenthető” ilyen típusú szingularitásokkal rendelkező tartományokra is.