7. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Legyen k nemnegatív egész szám. Igazoljuk, hogy ekkor

   a) egy $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ függvény pontosan akkor van a $H^k(\mathbb{R}^n)$ térben, ha
   $$\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n);$$

   b) létezik $C > 0$ konstans, hogy
   $$\frac{1}{C}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \le \|\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}(\mathscr{F}u)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}.$$

2. Milyen $s \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy az alábbi függvények a $H^s(\mathbb{R})$ térben vannak?

   a) $\chi_{[-1,1]}$;

   b) $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} * \cdots * \chi_{[-1,1]}$, ahol a konvolúció k tényezőből áll;

   c) $e^{-|x|}$.

3. Legyenek $n \ge 1$, $k > \frac{n}{2}$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $H^k(\mathbb{R}^n) \subset C_b^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\mathbb{R}^n)$, továbbá a beágyazás operátora korlátos.

4. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány ($n \ge 1$), továbbá $k > \frac{n}{2}$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

   a) $H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\Omega)$;

   b) ha Ω pereme k-szor folytonosan differenciálható, akkor $H^k(\Omega) \subset C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{\Omega})$, továbbá a beágyazás operátora korlátos.

5. Legyen $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^r\}$, és tekintsük az $u(x,y) := x^\alpha$ ($(x,y) \in \Omega$) függvényt, ahol $\frac{3-r}{2} < \alpha < 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor $u \in H^2(\Omega)$, de $u \notin C(\overline{\Omega})$.