A 7. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, amelyre $0 \in \Omega$, és $\Omega^* := \Omega \setminus \{0\}$. Tegyük fel, hogy az $u \in C^1(\Omega^*)$ függvényre

$$\int_\Omega u^2 + \int_\Omega \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 < \infty,$$

továbbá $\lim_{x\to 0} |x|^{n-1}u(x) = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor

a) $u \in H^1(\Omega)$, és az elsőrendű általánosított deriváltjai megegyeznek az (origón kívül Ω-n mindenütt létező) klasszikus elsőrendű deriváltakkal.

b) $\sin u \in H^1(\Omega)$, és az elsőrendű általánosított deriváltjai megegyeznek az (origón kívül Ω-n mindenütt létező) klasszikus elsőrendű deriváltakkal.

Megoldás. a) Legyen $\varepsilon > 0$, amelyre $B(0,\varepsilon) \subset \Omega$. Ekkor $u \in C^1(\Omega \setminus B(\varepsilon, 1))$, így az első Green-tétel alapján $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ esetén minden $j = 1, \dots, n$ indexre

$$\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} u\partial_j\varphi = -\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} (\partial_j u)\varphi + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi\nu_j\,d\sigma + \int_{\partial\Omega} u\varphi\nu_j\,d\sigma, \tag{1}$$

ahol a $\partial\Omega$-n vett peremintegrál értéke 0, mert φ kompakt tartójú Ω-ban (és ne feledjük, hogy a $B(0,\varepsilon)$ gömbfelületi ν normális most a középpont felé van irányítva). A feltételekből következően $u \in L^2(\Omega)$ és $\partial_j u \in L^2(\Omega)$, továbbá φ és $\partial_j\varphi$ korlátos az Ω halmazon, így a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} u\partial_j\varphi = \int_\Omega u\partial_j\varphi,$$

valamint

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} (\partial_j u)\varphi = \int_\Omega (\partial_j u)\varphi.$$

Másfelől a $\lim_{x\to 0} |x|^{n-1}u(x) = 0$ feltétel figyelembe vételével

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi\nu_j\,d\sigma\right| &\le A(S(0,\varepsilon)) \cdot \sup_{|x|=\varepsilon} |u(x)| \cdot \sup_\Omega |\varphi| \\ &\le \text{const} \cdot \left(\varepsilon^{n-1} \sup_{|x|=\varepsilon} |u(x)|\right) \cdot \sup_\Omega |\varphi| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0,\end{aligned}$$

ahol $A(S(0,\varepsilon))$ az $S(0,\varepsilon)$ gömbfelület felszíne, amely (a klasszikus analízisből jól ismert módon) arányos ε^{n-1}-nel. A fenti határátmenetek elvégzésével az (1) egyenletből

$$\int_\Omega u\partial_j\varphi = -\int_\Omega \partial_j u\varphi$$

adódik, ami valóban azt jelenti, hogy a j-edik változó szerinti általánosított elsőrendű derivált megegyezik a klasszikus $\partial_j u$ deriválttal.

b) Legyen $v = \sin u$. Világos, hogy Ω-n $v \in L^2(\Omega)$, hiszen $v \in L^\infty(\Omega)$. Másrészt az összetett függvény deriválási szabálya alapján (az origó kivételével) $\partial_j v = (\cos v) \cdot \partial_j u$, ezért $|\partial_j v| \le |\partial_j u|$. Ebből következően a feladatban u-ra kirótt feltételek v-re is teljesülnek, így az a) rész miatt $v \in H^1(\Omega)$.

2. Feladat. Legyen $\Omega := B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$, ahol $0 < R < \infty$. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy az $u(x) := |x|^\alpha$ függvényre $u \in L^1(\Omega)$?

Megoldás. Felhasználjuk a következő (úgynevezett co-area) formulát, amely a kétdimenziós polárkoordinátás helyettesítés magasabb dimenziós megfelelőjének is tekinthető:

$$\int_{B(0,R)} |x|^\alpha\,dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B(0,r)} |x|^\alpha\,d\sigma_x\right) dr.$$

Felhasználva, hogy a $\partial B(0,r)$ n-dimenziós gömbfelület felszíne r^{n-1}-nel arányos, kapjuk, hogy

$$\int_{B(0,R)} |x|^\alpha\,dx = \text{const} \cdot \int_0^R r^{\alpha+n-1}\,dr.$$

Az egyváltozós analízisből jól ismert, hogy a 0 környezetében az $r \mapsto r^{\alpha-n+1}$ hatványfüggvény (esetleg) improprius integrálja pontosan akkor véges, ha $\alpha+n-1>-1$ azaz $\alpha>-n$. Ezt azt jelenti, hogy az u függvény pontosan akkor $L^1(\Omega)$-beli, ha $\alpha>-n$. Megjegyezzük, hogy $u \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, ha $\alpha<-n$, amely az előbbiek mintájára könnyen adódik (ekkor $r \mapsto r^{\alpha-n+1}$ hatványfüggvénynek az (R,∞) szakaszon vett integrálhatósága a feltétel).

3. Feladat. Legyen $\Omega := B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 3$, $0<R<\infty$ és $1-\frac{n}{2}<\alpha<0$, akkor az $u(x) := |x|^\alpha$ függvényre $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$. Igazoljuk, hogy ugyanilyen feltételek mellett a $v(x) := \sin|x|^\alpha$ függvényre $v \in H^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.

Megoldás. A 2. Feladat alapján $u \in L^2(B(0,R))$ (azaz $u^2 \in L^1(B(0,R))$) pontosan akkor, ha $2\alpha>-n$, vagyis $\alpha>-\frac{n}{2}$. Az origó kivételével u sima függvény ($\alpha \geq 1$ esetén természetesen az origóban is), hiszen $u(x) = (|x|^2)^{\alpha/2}$, így klasszikus értelemben

$$\partial_j u(x) = \alpha x_j |x|^{\alpha-2} \qquad (x \neq 0).$$

Ebből következően

$$\sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 = |\alpha||x|^{2\alpha-4} \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = |\alpha||x|^{2\alpha-2}.$$

Ismét a 2. Feladatot alkalmazva nyerjük, hogy $\sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 \in L^2(B(0,R))$ pontosan akkor, ha $2\alpha-2>-n$, azaz $\alpha>1-\frac{n}{2}$. Következésképpen $\alpha>-\frac{n}{2}$ és $\alpha>1-\frac{n}{2}$ mindenképpen szükséges ahhoz, hogy $u \in H^1(B(0,R))$ teljesüljön. Ez nyilván az $\alpha>1-\frac{n}{2}$ feltételt jelenti, és ekkor valóban $u \in H^1(B(0,R))$, ugyanis $\alpha>1-n$ miatt

$$\lim_{x\to 0} |x|^{n-1} u(x) = \lim_{x\to 0} |x|^{\alpha+n-1} = 0,$$

és így alkalmazható az 1. Feladat állítása.

Az, hogy $1-\frac{n}{2}<\alpha<0$ esetén $u \notin L^\infty(B(0,R))$ és $u \notin C(B(0,R))$ nem szorul magyarázatra.

A feladat második része következik az 1. Feladat állításából és abból, hogy a szinusz függvény korlátos, tehát $u \in L^\infty(B(0,R))$, valamint a szinusz függvénynek a végtelenben nincs határértéke, ezért $u \notin C(B(0,R))$.

4. Feladat. Legyen $\Omega := B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 3$, $0<R<1$, akkor az $u(x) := \log|\log|x||$ függvényre $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$. Igazoljuk, hogy ugyanilyen feltételek mellett a $v(x) := \sin\log|\log|x||$ függvényre $v \in H^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.

Megoldás. Az 1. Feladat állítását használjuk. Először megmutatjuk, hogy $n \geq 2$ esetén

$$\lim_{|x|\to 0} |x|^{n-1} \log|\log|x|| = 0. \tag{2}$$

Ennél többet is állítunk, mégpedig tetszőleges $\eta>0$ számot véve

$$\lim_{|x|\to 0} |x|^{\eta} \log|\log|x|| = 0.$$

Amennyiben ez igaz, akkor $n \geq 2$ esetén az $\eta = n-1>0$ választással kapjuk a (2) összefüggést. A klasszikus analízisből jól ismert, hogy minden $\eta>0$ számra

$$\lim_{r\to 0+} r^\eta \log r = 0, \qquad \lim_{r+\infty} \frac{\log r}{r^\eta} = 0.$$

Ebből következően

$$|x|^\eta \log|\log|x|| = \frac{\log|\log|x||}{|\log|x||^\eta} \cdot |\log|x||^\eta \, |x|^\eta \xrightarrow{|x|\to 0} 0.$$

Ez azt is jelenti, hogy rögzített $0<R<1$ és $0<\eta<n/2$ választás mellett van olyan $C>0$ konstans, hogy

$$\int_{B(0,R)} |u|^2 \leq C \int_{B(0,R)} |x|^{-2\eta}\, dx < \infty,$$

felhasználva a 2. Feladatot, és azt, hogy $-2\eta>-n$. Másrészt $j=1,\dots,n$ esetén

$$\partial_j(\log|\log|x||) = \frac{1}{\log|x|} \cdot \partial_j(-\log|x|) = -\frac{1}{\log|x|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \partial_j(|x|) = -\frac{1}{\log|x|} \frac{x_j}{|x|^2}, \tag{3}$$

így $n \geq 3$ feltételezésével (a 2. Feladat alapján)

$$\int_{B(0,R)} \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 = \int_{B(0,R)} \frac{1}{|\log|x||^2 \, |x|^2}\, dx \leq \frac{1}{|\log R|^2} \int_{B(0,R)} |x|^{-2}\, dx < \infty$$

Teljesülnek tehát az 1. Feladat feltételei, következésképpen $u \in H^1(B(0,R))$. Másfelől pedig $|x| \to 0$ esetén $\log|x| \to \infty$, így $u(x) \to +\infty$, tehát $u \notin L^\infty(B(0,R))$ és $u \notin C(B(0,R))$.

A feladat második része következik az 1. Feladat b) részének állításából és abból, hogy a szinusz függvény korlátos, tehát $u \notin L^\infty(B(0,R))$, valamint $|x| \to \infty$ esetén $\log|\log|x|| \to \infty$ és a szinusz függvénynek a végtelenben nincs határértéke, ezért $u \notin C(B(0,R))$.

5. Feladat. Legyen $\Omega := B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. Igazoljuk, hogy ha $0 < R < 1$, $n = 2$, $0 < \beta < 1/2$, (vagy $n \geq 3$ és $\beta > 0$) akkor az $u(x) := |\log|x||^\beta$ függvényre $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy ugyanilyen feltételek mellett a $v(x) := \sin|\log|x||^\beta$ függvényre $v \in H^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.

Megoldás. Az 1. Feladat állítását használjuk. Először is a klasszikus analízisből jól ismert, hogy minden $\eta > 0$ számra

$$\lim_{r\to 0} r^\eta \log r = 0,$$

speciálisan $n \geq 2$ és tetszőleges $\beta > 0$ esetén az $\eta = \beta(n-1)$ választással

$$\lim_{r\to 0} r^{\beta(n-1)} |\log r|^\beta = 0.$$

Másfelől $j = 1, \ldots, n$ esetén a (3) összefüggés alapján

$$\partial_j \left(|\log|x||^\beta \right) = -\beta \, |\log|x||^{\beta-1} \cdot \frac{x_j}{|x|^2},$$

így a co-area formula felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)} u^2 + \int_{B(0,R)} \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 = \\
&= \int_{B(0,R)} |\log|x||^{2\beta} \, dx + \int_{B(0,R)} \beta^2 |x|^{-2} \, |\log|x||^{2\beta-2} \, dx = \\
&= C_1 \int_0^R r^{n-1} \, |\log|r||^{2\beta} \, dr + C_2 \int_0^R r^{n-3} \, |\log r|^{2\beta-2} \, dr.
\end{aligned} \tag{4}$$

Ismeretes egyváltozós analízisből, hogy rögzített $0 < R < 1$ mellett

$$\int_0^R r^a \, |\log r|^b \, dr < \infty$$

pontosan akkor teljesül, ha $a > -1$ és b tetszőleges, vagy $a = -1$ és $b < -1$. Ebből következően (4) jobb oldala pontosan akkor véges, ha $n = 2$ és $\beta < \frac{1}{2}$, vagy $n \geq 3$ és β tetszőleges. A feladat második része következik az 1. Feladat b) részének állításából és abból, hogy a szinusz függvény korlátos, tehát $u \notin L^\infty(B(0,R))$, valamint $|x| \to \infty$ esetén $|\log|x||^\beta \to \infty$ és a szinusz függvénynek a végtelenben nincs határértéke, ezért $u \notin C(B(0,R))$.

6. Feladat. Legyen $\Omega := B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $(r_j) \subset \Omega$, és értelmezzük az u függvényt a következőképpen

$$u(x) := \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} |x - r_j|^\alpha \qquad (x \in \Omega).$$

Bizonyítsuk be, hogy $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$ esetén $u \in H^1(\Omega)$, továbbá ha $(r_j) \subset \Omega$ sűrű, és $\alpha < 0$, akkor u az Ω tartomány semmilyen nyílt részhalmazán sem korlátos.

Megoldás. Ha $\alpha \geq 0$, akkor a $B(0,1)$ gömbön $|x - r_j| \leq 1$, így

$$|u(x)| \leq \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = 1,$$

tehát $u(x)$ értelmes minden $x \in B(0,1)$ esetén. Az $\alpha < 0$ esetben viszont első látásra az sem teljesen világos, hogy u majdnem mindenütt véges értékű. Legyen $\alpha < 0$ és $0 < \varepsilon < 1$, ekkor a $B(0,1) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^\infty B(r_j, \varepsilon 2^{j/(2\alpha)}) \right)$ halmaz minden x elemére érvényes, hogy $|x - r_j|^\alpha \geq \varepsilon/2^{-j/2}$, ezért

$$|u(x)| \leq \sum_{j=1}^\infty \varepsilon^\alpha 2^{-j/2} < \infty.$$

Másrészt pedig a $\bigcup_{j=1}^{\infty} B(r_j, \varepsilon 2^{j/(2\alpha)})$ halmaz össztérfogata legfeljebb

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B(r_j, \varepsilon 2^{j/(2\alpha)})) \leq C\varepsilon^n \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jn/(2\alpha)},$$

amely $\varepsilon \to 0+$ esetén 0-hoz tart. Ez azt jelenti, hogy egy nullmértékű halmazon (nevezetesen az (r_j) ponthalmazon) kívül u véges értékű függvény.

Tegyük fel most, hogy $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$ és legyen $v_j(x) := |x - r_j|^\alpha$. A 2. Feladat megoldásában megmutattuk, hogy ekkor $x \mapsto |x|^\alpha \in H^1(B(0,R))$, továbbá az általánosított elsőrendű deriváltak megegyeznek az origó kivételével létező klasszikus deriváltakkal. Ekkor nyilván $v_j \in H^1(\Omega)$, továbbá az általánosított elsőrendű deriváltak megegyeznek az r_j kivételével mindenütt létező klasszikus deriválttal, hiszen v_j-t eltolással kapjuk az $x \mapsto |x|^\alpha$ függvényből. Könnyen látható továbbá, hogy minden $j = 1, 2, \dots$ esetén

$$\|v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|x \mapsto |x|^\alpha\|_{L^2(B(0,2))} =: c_1.$$

Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = c_1 < \infty. \tag{5}$$

(Valójában ebből is következtethetünk u majdnem mindenütt való végességére.) Hasonlóan, minden $j = 1, 2, \dots$ esetén

$$\|\partial_k v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \max_{k=1,\dots,n} \|\partial_i (x \mapsto |x|^\alpha)\|_{L^2(B(0,2))} < \infty, \tag{6}$$

ezért

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j}{2^j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = c_1 < \infty.$$

Mivel a $\partial_k v_j$ klasszikus deriváltak egyben általánosított deriváltak is, ezért minden $j = 1, 2, \dots$ esetén

$$\int_\Omega v_j \partial_i \varphi = -\int_\Omega \partial_i v_j \varphi,$$

így

$$\sum_{j=1}^{\ell} \int_\Omega \frac{v_j}{2^j} \partial_k \varphi = -\sum_{j=1}^{\ell} \int_\Omega \frac{\partial_k v_j}{2^j} \varphi.$$

Az (5) és (6) becslések és φ, $\partial_k \varphi$ korlátossága folytán a Lebesgue-tétel alapján határátmenettel

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \int_\Omega \frac{v_j}{2^j} \right) \partial_i \varphi = -\left(\sum_{j=1}^{k} \int_\Omega \frac{\partial_i v_j}{2^j} \right) \varphi$$

adódik, ami azt mutatja, hogy általánosított értelemben

$$\partial_k u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial_k v_j}{2^j},$$

amelyről már láttuk, hogy $L^p(\Omega)$-ban van.

Végül jegyezzük meg, hogy amennyiben $(r_j) \subset \Omega$ sűrű részhalmaz, akkor nyilván minden Ω-beli nyílt halmazba esik eleme, és egy r_j pont környezetében az u függvény $\alpha < 0$ esetén nem korlátos (hiszen $|x - r_j^\alpha$ sem az).