6. feladatsor

Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, amelyre $0 \in \Omega$, és $\Omega^* := \Omega \setminus \{0\}$. Tegyük fel, hogy az $u \in C^1(\Omega^*)$ függvényre
$$\int_\Omega u^2 + \int_\Omega \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 < \infty,$$
továbbá $\lim\limits_{x \to 0} |x|^{n-1} u(x) = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor
   a) $u \in H^1(\Omega)$, és az elsőrendű általánosított deriváltjai megegyeznek az (origón kívül Ω-n mindenütt létező) klasszikus elsőrendű deriváltakkal.
   b) $\sin u \in H^1(\Omega)$, és az elsőrendű általánosított deriváltjai megegyeznek az (origón kívül Ω-n mindenütt létező) klasszikus elsőrendű deriváltakkal.
2. Legyen $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$, ahol $0 < R < \infty$. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy az $u(x) := |x|^\alpha$ függvényre $u \in L^1(\Omega)$?
3. Legyen $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 3$, $0 < R < \infty$ és $1 - \frac{n}{2} < \alpha < 0$, akkor az $u(x) := |x|^\alpha$ függvényre $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$. Igazoljuk, hogy ugyanilyen feltételek mellett a $v(x) := \sin |x|^\alpha$ függvényre $v \in H^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.
4. Legyen $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 3$, $0 < R < 1$, akkor az $u(x) := \log |\log |x||$ függvényre $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$. Igazoljuk, hogy ugyanilyen feltételek mellett a $v(x) := \sin \log |\log |x||$ függvényre $v \in H^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.
5. Legyen $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$. Igazoljuk, hogy ha $0 < R < 1$, $n = 2$, $0 < \beta < 1/2$, (vagy $n \geq 3$ és $\beta > 0$) akkor az $u(x) := |\log |x||^\beta$ függvényre $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy ugyanilyen feltételek mellett a $v(x) := \sin |\log |x||^\beta$ függvényre $v \in H^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.
6. Legyen $\Omega := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $(r_j) \subset \Omega$, és értelmezzük az u függvényt a következőképpen:
$$u(x) := \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} |x - r_j|^\alpha \qquad (x \in \Omega).$$
Bizonyítsuk be, hogy $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$ esetén $u \in H^1(\Omega)$, továbbá ha $(r_j) \subset \Omega$ sűrű, és $\alpha < 0$, akkor u az Ω tartomány semmilyen nyílt részhalmazán sem korlátos.