Az 5. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u$ egydimenziós differenciáloperátor egy $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldása

$$E(t) := \begin{cases} y(t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, \end{cases}$$

ahol $y \in C^m(0,\infty) \cap C^{m-1}([0,\infty))$, amelyre

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad \text{a } (0,\infty)\text{-en},$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots, y^{(m-2)}(0) = 0,\ y^{(m-1)}(0) = 1.$$

Megoldás. Mivel az y függvény $(m-1)$-szer folytonosan differenciálható a $[0,\infty)$ intervallumon, ezért a kezdeti feltételek miatt E is ugyanilyen tulajdonságú $\mathbb{R}$-en, tehát az egész $\mathbb{R}$-en klasszikus értelemben létezik $E^{(j)}$ ($j = 0, \ldots, m-1$). Ez viszont azt jelenti, hogy $T_E^{(j)} = T_{E^{(j)}}$ minden $j = 0, \ldots, m-1$ esetén. Vegyük észre, hogy $E^{(m-1)}$ folytonosan differenciálható a $(-\infty, 0)$ intervallumon, hiszen ott azonosan 0, továbbá ugyancsak folytonosan differenciálható a $[0,\infty)$ intervallumon, mert ott megegyezik $y^{(m-1)}$-gyel, amelynek deriváltja $y^{(m)} = -(a_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + a_1y' + c_0y)$ folytonos a $[0,\infty)$-en. Ezenkívül $y^{(m-1)}$-nek a 0-ban a jobb oldali határértéke 0, a bal oldali határértéke pedig a kezdeti feltételből adódóan 1. Alkalmazhatjuk tehát a szakaszonként folytonosan differenciálható függvények általánosított deriváltjáról szóló állítást, így

$$T_E^{(m)} = ((T_E)^{(m-1)})' = T_{E^{(m)}} + \delta_0,$$

ahol $E^{(m)}$ az $E^{(m-1)}$ függvény m.m. klasszikus értelemben létező deriváltját jelöli. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} T_E^{(m)} + a_{m-1}T_E^{(m-1)} + \cdots + a_1T_E' + a_0T_E &= \delta_0 + T_{E^{(m)}} + a_{m-1}T_{E^{(m-1)}} + \cdots + a_1T_{E'} + a_0T_E \\ &= \delta_0 + T_{E^{(m)} + a_{m-1}E^{(m-1)} + \cdots + a_1E' + a_0E} = \delta_0, \end{aligned}$$

hiszen a $(0,\infty)$ intervallumon

$$E^{(m)} + a_{m-1}E^{(m-1)} + \cdots + a_1E' + a_0E = y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y,$$

a $(-\infty, 0)$ intervallumon pedig definíció szerint

$$E^{(m)} + a_{m-1}E^{(m-1)} + \cdots + a_1E' + a_0E = 0.$$

A feladat állítását fizikailag a következőképpen szemléltethetjük. A differenciálegyenlet egy rendszer mozgását írja le, a jobb oldalon pedig a külső erőhatás áll, gondoljunk csak Newton második törvényére: az $F(t) = m\ddot{x}(t)$. Jelen esetben $F = \delta_0$, azaz egységnyi impulzust adunk a renszernek, amit másképp úgy fogalmazhatunk, hogy 1 kezdeti sebességgel indítjuk el a nyugalmi helyzetéből, tehát $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 1$.

2. Feladat. Határozzuk meg a következő egydimenziós differenciáloperátorok egy-egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldását!

a) $u' + au$ ($a \in \mathbb{R}$)

b) $u'' + a^2u$ ($a \in \mathbb{R}$)

Megoldás. Az 1. Feladat állítását felhasználva, az $u' + au$ operátor egy alapmegoldását az $y' + ay = 0$, $y(0) = 1$ kezdetiérték-feladat megoldásának segítségével állíthatjuk elő. A kezdetiérték-feladat megoldása $y(t) = e^{-at}$, így az operátor egy alapmegoldása $E(t) = H(t)e^{-at}$, ahol H a Heaviside-függvény.

Hasonlóan, az 1. Feladat alapján az $u'' + a^2u$ operátor egy alapmegoldását az $y'' + a^2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-feladat megoldásának segítségével állíthatjuk elő. A kezdetiérték-feladat megoldása $a \neq 0$ esetén $y(t) = \frac{1}{a}\sin at$, így az operátor egy alapmegoldása $E(t) = H(t)\frac{1}{a}\sin at$, ahol H a Heaviside-függvény. Az $a = 0$ esetben a kezdetiérték-feladat megoldása $y(t) = t$, tehát az u'' operátor egy alapmegoldása $E(t) = H(t)t$.

3. Feladat. Határozzuk meg a következő közönséges differenciálegyenletek egy-egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását az alapmegoldások segítségével (ahol H a Heaviside-függvényt jelöli)!

a) $u'' - 2u' + 2u = H$

b) $u'' - 2u' - 3u = H$

c) $u'' - 2u' + u = H$

Megoldás. a) Az 1. Feladat állítását használjuk. A $P(u) = u'' - 2u' + 2u$ operátor egy alapmegoldását nyerjük, ha megoldjuk az $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot, és tekintjük az $E(t) = H(t)y(t)$ disztribúciót. Az $y''-2y'+2y = 0$ egyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2-2\lambda+2 = 0$, amelynek gyökei $\lambda = 1\pm i$, így a közönséges differenciálegyenlet általános megoldása $y_h(t) = e^t(c_1 \cos t+c_2 \sin t)$. Figyelembe véve a kezdeti feltételeket $y(t) = e^t \sin t$ adódik, tehát $E(t) = H(t)e^t \sin t$ az operátor egy alapmegoldása.

Az E alapmegoldás segítségével az $u'' - 2u' + 2u = H$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását az $u = E * H$ konvolúció szolgáltatja. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $t > 0$ esetén

$$(E * H)(t) = \int_{\mathbb{R}} E(\tau)H(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t e^\tau \sin\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\left[e^\tau(\sin\tau - \cos\tau\right]_0^t = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2},$$

$t < 0$ esetén pedig $(E * H)(t) = 0$. Végeredményben az az $u'' - 2u' + 2u = H$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldása az $u(t) = H(t)(\frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2})$ disztribúció.

b) A $P(u) = u''-2u'-3u$ operátor egy alapmegoldását nyerjük, ha megoldjuk az $y''-2y'-3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot, és tekintjük az $E(t) = H(t)y(t)$ disztribúciót. Az $y'' - 2y' - 3y = 0$ egyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2-2\lambda-3 = 0$, amelynek gyökei $\lambda = 1$ és $\lambda = -3$, így a közönséges differenciálegyenlet általános megoldása $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{-3t}$. Figyelembe véve a kezdeti feltételeket $y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-3t}$ adódik, tehát $E(t) = \frac{1}{4}H(t)(e^t + e^{-3t})$ az operátor egy alapmegoldása.

Az E alapmegoldás segítségével az $u'' - 2u' - 3u = H$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását az $u = E * H$ konvolúció szolgáltatja. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $t > 0$ esetén

$$(E * H)(t) = \int_{\mathbb{R}} E(\tau)H(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t (e^\tau - e^{-3\tau}\,d\tau = \frac{1}{4}\left[e^t au + \frac{1}{3}e^{-3\tau}\right]_0^t = \frac{1}{4}(e^t + e^{-3t} - 2),$$

$t < 0$ esetén pedig $(E * H)(t) = 0$. Végeredményben az $u'' - 2u' - 3u = H$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldása az $u(t) = \frac{1}{4}H(t)(e^t + e^{-3t} - 2)$ disztribúció.

c) A $P(u) = u'' - 2u' + u$ operátor egy alapmegoldását nyerjük, ha megoldjuk az $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot, és tekintjük az $E(t) = H(t)y(t)$ disztribúciót. Az $y'' - 2y' + y = 0$ egyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2-2\lambda+1 = 0$, amelynek (kétszeres) gyöke $\lambda = 1$, így a közönséges differenciálegyenlet általános megoldása $y_h(t) = e^t(c_1 + c_2t)$. Figyelembe véve a kezdeti feltételeket $y(t) = te^t$ adódik, tehát $E(t) = H(t)te^t$ az operátor egy alapmegoldása.

Az E alapmegoldás segítségével az $u'' - 2u' + 2u = H$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását az $u = E * H$ konvolúció szolgáltatja. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $t > 0$ esetén

$$(E * H)(t) = \int_{\mathbb{R}} E(\tau)H(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \tau e^\tau\,d\tau = \left[\tau e^\tau - e^\tau\right]_0^t = te^t - e^t + 1,$$

$t < 0$ esetén pedig $(E * H)(t) = 0$. Végeredményben az $u'' - 2u' + u = H$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldása az $u(t) = H(t)(te^t - e^t + 1)$ disztribúció.

4. Feladat. Keressük meg az $u'' - au' = \delta_1'$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását, ahol $a \in \mathbb{R}$ paraméter. Igaz-e, hogy van reguláris disztribúció megoldása az egyenletnek?

Megoldás. Kétféleképpen is okoskodhatunk. Egyrészt megkjereshetjük az $u'' - au'$ operátor egy E alapmegoldását és ekkor $u = E * \delta_1'$. Úgy is eljárhatunk azonban, hogy az $v' - av = \delta_1$ egyenlet egy megoldását keressük meg, és ekkor $u = v'$ megoldja a feladatban szereplő egyenletet. Ez utóbbi esetben használhatjuk a 2. Feladat eredményét miszerint az $u' - au$ operátor egy alapmegoldása $E(t) = H(t)e^{at}$. Következésképpen (felhasználva a 3. feladatsor 6. Feladatának eredményét) $v = (H(t)e^{at}) * (\delta_1) = H(t - 1)e^{a(t-1)}$, és így (mivel szakaszonként folytonosan differenciálható függvények disztribúció értelemben vett deriváltja megegyezik a klasszikus derivált és az ugrásokra koncentrált, azugrással súlyozott Dirac-delták összegével, ezért) $u = v' = (t \mapsto H(t-1)ae^{a(t-1)}$ reguláris disztribúció.

Amennyiben az $u'' - au'$ operátor E alapmegoldását keressük meg, akkor $E(t) = H(t)e^{at}$, és így $u = (H(t)e^{at}) * (\delta_1') = ((H(t)e^{at}) * \delta_1)'$, ahonnan a konvolúció és a deriválás utána a korábbi megoldást nyerjük.

5. Feladat. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg a következő n-dimenziós (ahol n az x változó dimenzióját jelöli) differenciáloperátorok egy-egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ alapmegoldását!

a) $\partial_t u + b \cdot \operatorname{grad} u + cu, \quad b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (transzportegyenlet)

b) $\partial_t^2 u - \Delta u, \quad n = 1, 3$ (hullámegyenlet)

Megoldás.

a) Olyan $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciót keresünk, amelyre

$$\partial_t E - b \cdot \operatorname{grad} E + cE = \delta_{\underline{0}}, \tag{1}$$

ahol $\delta_{\underline{0}}$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér origójára koncentrált Dirac-delta disztribúció. Az (1) egyenlet mindkét oldalára az x változóban a Fourier-transzformációt (más szóval az $\mathscr{F}_{0,n}$ parciális Fourier-transzformációt) alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathscr{F}_{0,n}(\partial_t E - b \operatorname{grad} E + cE) = \mathscr{F}_{0,n}(\delta_{\underline{0}}). \tag{2}$$

Az 1. feladatsor 6. Feladata alapján $\delta_{\underline{0}} = \delta_0 \times \delta_{\underline{\underline{0}}}$, (ahol δ_0, $\delta_{\underline{\underline{0}}}$ az egy-, illetve n-dimenziós Dirac-delta), így a 4. feladatsor 4. Feladat a) részének felhasználásával

$$\mathscr{F}_{0,n}(\delta_{\underline{0}}) = \delta_0 \times \mathscr{F}_{0,n}(\delta_{\underline{\underline{0}}}) = \delta_0 \times \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\delta_0$$

adódik (ahol még felhasználtuk, hogy a parciális Fourier-transzformált nem hat a direkt szorzat nulladik változójában, ami könnyen látható a definíció alapján). Ekkor a (2) egyenletből a Fourier-transzformáció és a derivált kapcsolatának (lásd a 4. feladatsor 4. Feladatát) figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$\partial_t(\mathscr{F}_{0,n}E) + \left(i\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j + c\right)\mathscr{F}_{0,n}E = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\delta_0. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy a (3) egyenlet éppen azt jelenti, hogy rögzített x változók esetén a $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathscr{F}_{0,n}E$ disztribúció alapmegoldása az egydimenziós $\partial_t u + \left(i\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j + c\right)u$ operátornak. A 2. Feladat alapján viszont ismerjük az említett operátor egy alapmegoldását, nevezetesen $H(t)e^{-\left(i\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j + c\right)t}$, és ekkor az inverz Fourier-transzformáció segítségével a transzportegyenlet egy alapmegoldását nyerjük. Legyen tehát

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathscr{F}_{0,n}E = H(t)e^{-\left(i\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j + c\right)t} = H(t)e^{-ct}e^{-i\langle bt,\xi\rangle},$$

és így a transzportegyenlet egy alapmegoldása

$$E = \mathscr{F}_{0,n}^{-1}\left(\frac{H(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-ct}e^{-i\langle bt,\xi\rangle}\right). \tag{4}$$

Most már csak a 4. feladatsor 4. Feladatának a) részét kell alkalmaznunk, és így a (4) formulából rögzített $t > 0$ esetén

$$E(t,x) = H(t)e^{-ct}\delta_{bt}(x),$$

$t < 0$ esetén pedig $E(t,x) = 0$ adódik. Végeredményben tehát, a transzportegyenlet egy alapmegoldása a következő $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúció:

$$E(t,x) = H(t)e^{-ct}\delta_{bt}(x),$$

amelyet úgy értelmezünk, hogy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ esetén

$$E(\varphi) = \int_0^\infty e^{-ct}\varphi(t,bt)\,dt.$$

(A δ_{bt} disztribúció az x változóban hat, így rögzített t esetén csak $x = bt$ számít, ezt követően alkalmazzuk a $H(t)e^{-ct}$ reguláris disztribúciót, vagyis integrálunk a $(0,\infty)$-en, valójában a két disztribúció direkt szorzatáról van szó.)

b) A számolást tetszőleges n-re végezzük el. Olyan $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciót keresünk, amelyre

$$\partial_t^2 E - \Delta E = \delta_{\underline{0}}, \tag{5}$$

ahol $\delta_{\underline{0}}$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér origójára koncentrált Dirac-delta disztribúció. Az (5) egyenlet mindkét oldalára az x változóban a Fourier-transzformációt (más szóval az $\mathscr{F}_{0,n}$ parciális Fourier-transzformációt) alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathscr{F}_{0,n}(\partial_t^2 E - \Delta E) = \mathscr{F}_{0,n}(\delta_{\underline{0}}). \tag{6}$$

Az 1. feladatsor 6. Feladata alapján $\delta_{\underline{0}} = \delta_0 \times \delta_{\underline{\underline{0}}}$, (ahol δ_0, $\delta_{\underline{\underline{0}}}$ az egy-, illetve n-dimenziós Dirac-delta), így a 4. feladatsor 4. Feladat a) részének felhasználásával

$$\mathscr{F}_{0,n}(\delta_{\underline{0}}) = \delta_0 \times \mathscr{F}_{0,n}(\delta_{\underline{\underline{0}}}) = \delta_0 \times \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\delta_0.$$

Ekkor a (6) egyenletből a Fourier-transzformáció és a derivált kapcsolatának (lásd a 4. feladatsor 4. Feladatát) figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$\partial_t^2(\mathscr{F}_{0,n}E) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \mathscr{F}_{0,n}E = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\delta_0. \tag{7}$$

Vegyük észre, hogy a (7) egyenlet éppen azt jelenti, hogy rögzített x változók esetén a $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathscr{F}_{0,n}E$ disztribúció alapmegoldása az egydimenziós $\partial_t^2 u + |\xi|^2 u$ operátornak. A 2. Feladat alapján viszont ismerjük az említett operátor egy alapmegoldását, nevezetesen $H(t)\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$, és ekkor az inverz Fourier-transzformáció segítségével a hullámegyenlet egy alapmegoldását nyerjük. Legyen tehát

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathscr{F}_{0,n}E = H(t)\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|},$$

és így a hullámegyenlet egy alapmegoldása

$$E = \mathscr{F}_{0,n}^{-1}\left(\frac{H(t)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}\right). \tag{8}$$

Megjegyezzük, hogy a Paley-Wiener-Schwartz-tételből következően $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, továbbá $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$, tehát a hullámegyenlet alapmegoldásának tartója része egy konvex körkúpnak. Ennek egy következménye például, hogy a hullámegyenlet olyan jelenséget ír le, amelyben a hatás véges sebességgel terjed. Visszatérve a (8) formulához, az $n = 1$ esetben a 4. feladatsor 3. Feladat e) része alapján nyerjük, hogy

$$\mathscr{F}_{0,1}(H(t-|x|)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin t\xi}{\xi} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|},$$

így rögzített $t > 0$ esetén

$$E(t,x) = \frac{1}{2}H(t-|x|),$$

$t < 0$ esetén pedig $E(t,x) = 0$. Végeredményben tehát, az egydimenziós hullámegyenlet egy alapmegoldása az $E(t,x) = \frac{1}{2}H(t-|x|)$ függvényhez tartozó reguláris disztribúció.

Térjünk most rá a háromdimenziós esetre. Megmutatjuk, hogy a háromdimenziós hullámegyenlet egy alapmegoldása a következő $\tilde{E} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^4)$ disztribúció:

$$\tilde{E}(\varphi) = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t(0)}(x \mapsto \varphi(t,x))\,dt \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^4)).$$

Valóban, a 4. feladatsor 4. Feladat f) része, illetve a (8) formula felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}_{0,3}\tilde{E})(\varphi) = \tilde{E}(\mathscr{F}_{0,3}\varphi) &= \int_0^\infty \frac{1}{4\pi t}\delta_{S_t(0)}(\xi \mapsto (\mathscr{F}_{0,3}\varphi)(t,\xi))\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{4\pi t}(\mathscr{F}_{0,3}\delta_{S_t(0)})(\xi \mapsto \varphi(t,\xi))\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2t}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\varphi(t,\xi)\,d\xi\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^4}\frac{H(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\varphi(t,\xi)\,d\xi\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^4}(\mathscr{F}_{0,3}E)\varphi = (\mathscr{F}_{0,3}E)(\varphi),
\end{aligned}$$

ahonnan $\tilde{E} = E$ adódik, tehát $\tilde{E}$ a háromdimenziós hullámegyenlet egy alapmegoldása.

6. Feladat. Az alapmegoldások felhasználásával határozzuk meg az $Lu = f$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldását, ahol $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, amelyre $t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(t,x) = 0$, továbbá

a) $Lu = \partial_t u + b \cdot \operatorname{grad} u + cu, \quad b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (transzportegyenlet);

b) $Lu = \partial_t^2 u - \Delta u, \quad n = 1, 3$ (hullámegyenlet).