5. feladatsor

Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Mutassuk meg, hogy az $u^{(m)}+a_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+a_1u'+a_0u$ egydimenziós differenciáloperátor egy $E\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldása
$$E(t):=\begin{cases} y(t), \text{ ha } t>0,\\ 0, \quad\ \text{ ha } t\le 0,\end{cases}$$
ahol $y\in C^m(0,\infty)\cap C^{m-1}([0,\infty))$, amelyre
$$y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \quad \text{a } (0,\infty)\text{-en},$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ldots,y^{(m-2)}(0)=0,\ y^{(m-1)}(0)=1.$$

2. Határozzuk meg a következő egydimenziós differenciáloperátorok egy-egy $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldását!
   a) $u'+au$ $(a\in\mathbb{R})$
   b) $u''+a^2u$ $(a\in\mathbb{R})$

3. Határozzuk meg a következő közönséges differenciálegyenletek egy-egy $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását az alapmegoldások segítségével (ahol H a Heaviside-függvényt jelöli)!
   a) $u''-2u'+2u=H$
   b) $u''-2u'-3=H$
   c) $u''-2u'+u=H$

4. Keressük meg az $u''-au'=\delta_1'$ egyenlet egy $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását, ahol $a\in\mathbb{R}$ paraméter. Igaz-e, hogy van reguláris disztribúció megoldása az egyenletnek?

5. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg a következő n-dimenziós (ahol n az x változó dimenzióját jelöli) differenciáloperátorok egy-egy $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ alapmegoldását!
   a) $Lu=\partial_t u+b\cdot\operatorname{grad}u+cu,\quad b\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ (transzportegyenlet)
   b) $Lu=\partial_t^2u-\Delta u,\quad n=1,3$ (hullámegyenlet)

6. Az alapmegoldások felhasználásával határozzuk meg az $Lu=f$ egyenlet egy $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldását, ahol $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, amelyre $t\le 0, x\in\mathbb{R}^n$ esetén $f(t,x)=0$, továbbá
   a) $Lu=\partial_t u+b\cdot\operatorname{grad}u+cu,\quad b\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ (transzportegyenlet);
   b) $Lu=\partial_t^2u-\Delta u,\quad n=1,3$ (hullámegyenlet).