A 4. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\chi_{[a,b]}$ (az $[a,b]$ intervallum karakterisztikus függvénye). Számítsuk ki f Fourier-transzformáltját!

Megoldás. A $\chi_{[a,b]}$ függvény integrálható $\mathbb{R}$-en, hiszen kompakt tartójú korlátos függvény, így a Fourier-transzformáltja klasszikus értelemben létezik, nevezetesen

$$(\mathscr{F}(\chi_{[a,b]}))(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\chi_{[a,b]}(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\mathrm{i}x\xi}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}a\xi}}{\xi}-\frac{e^{-\mathrm{i}b\xi}}{\xi}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}}\left(\frac{\cos(a\xi)-\cos(b\xi)}{\xi}-\mathrm{i}\frac{\sin(b\xi)-\sin(a\xi)}{\xi}\right).$$

Megjegyezzük, hogy $a=-b$ esetén ebből a $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(b\xi)}{b\xi}$ függvényt nyerjük, tehát $(\mathscr{F}(\chi_{[-b,b]})(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(b\xi)}{b\xi}$. Speciálisan, $a=-b=-\pi$ esetén $(\mathscr{F}(\chi_{[-\pi,\pi]})(\xi)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sinc}\xi$, ahol $\operatorname{sinc}\xi=\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$, amelynek a jelfeldolgozásban van szerepe.

2. Feladat. Legyen $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-|x|}$.

a) Igazoljuk, hogy $(\mathscr{F}(f))(\xi)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+\xi^2}$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi=\pi e^{-|x|}$.

Megoldás. a) Az $x\mapsto\exp(-|x|)\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény integrálható $\mathbb{R}$-en, ezért a Fourier-transzformált klasszikus értelemben létezik. A definíció alapján

$$(\mathscr{F}(x\mapsto\exp(-|x|)))(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\mathrm{i}x\xi}e^{-|x|}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{x(1-\mathrm{i}\xi)}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{x(-1-\mathrm{i}\xi)}\,dx.$$

Formálisan

$$\int_{-\infty}^0 e^{x(1-\mathrm{i}\xi)}\,dx=\left[\frac{e^{x(1-\mathrm{i}\xi)}}{1-\mathrm{i}\xi}\right]_{x=-\infty}^0=\frac{1}{1-\xi\mathrm{i}},$$

ahol kihasználtuk, hogy $x\to+\infty$ esetén $e^{x(1-\mathrm{i}\xi)}=e^{-x}\cdot e^{-\mathrm{i}\xi}\to 0$, hiszen $\left|e^{-\mathrm{i}x\xi}\right|=1$. Hasonlóan

$$\int_0^{+\infty}e^{x(-1-\mathrm{i}\xi)}\,dx=\left[\frac{e^{x(-1-\mathrm{i}\xi)}}{1-\mathrm{i}\xi}\right]_{x=0}^{+\infty}=\frac{1}{1+\xi\mathrm{i}}.$$

Ebből következően

$$(\mathscr{F}(x\mapsto\exp(-|x|)))(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-\xi\mathrm{i}}+\frac{1}{1+\xi\mathrm{i}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}.$$

Formális számolás helyett úgy is megkaphattuk volna az iménti összefüggést, hogy (a sin függvény páratlan és a cos függvény páros volta miatt)

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-\mathrm{i}x\xi}e^{-|x|}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}(\cos(\xi x)+\mathrm{i}\sin(\xi x))\,dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos(\xi x)\,dx.$$

Kétszeres parciális integrálás után (egyváltozós analízis gyakorlatok klasszikus példája) kapjuk, hogy

$$\int e^{-x}\cos(\xi x)\,dx=-e^{-x}\cos(\xi x)-\int e^{-x}\xi\sin(\xi x)\,dx=-e^{-x}\cos(\xi x)+e^{-x}\xi\sin(\xi x)-\int e^{-x}\xi^2\sin(\xi x)\,dx,$$

ahonnan átrendezéssel

$$\int e^{-x}\cos(\xi x)\,dx=\frac{e^{-x}(\xi\sin(\xi x)-\cos(\xi x))}{1+\xi^2},$$

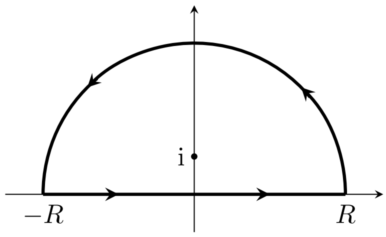
és ezután a feladat állítása egyszerű behelyettesítéssel adódik.

b) Az a) részben kapott Fourier-transzformáltra az inverz Fourier-transzformációt alkalmazva kapjuk, hogy

$$e^{-|x|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}\xi x}}{1+\xi^2}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi,$$

amit átrendezve éppen a bizonyítandó összefüggést nyerjük.

Megjegyezzük, hogy ez utóbbi összefüggést a $z \mapsto \dfrac{e^{\mathrm{i}xz}}{1+z^2}$ függvényre alkalmazott reziduumtétel segítségével is igazolhattuk volna. Ebben az esetben $x > 0$ mellett egy komplex vonalintegrált kell felírnunk a felső félsíkba eső R sugarú origó középpontú félkörlap pozitív irányítású határán ($x < 0$ esetén az alsó félsíkba eső félkörlap határán), lásd az 1. ábrát. Ekkor $R \to \infty$ esetén az íven vett integrál 0-hoz tart, ugyanis a számláló legfeljebb 1 abszolútértékű $x > 0$ esetén, a nevező pedig legfeljebb $R^2 - 1$ abszolútértékű, így az integrál értéke legfeljebb $\frac{R\pi}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$), a valós tengelyen pedig a keresett integrált kapjuk (hiszen a sin páratlan volta miatt kiesik). A reziduumtétel szerint a félköríven vett integrál megegyezik az integrandusnak a félkörlapba eső reziduumai összegének $2\pi\mathrm{i}$-szeresével. A félkörlapban csak a $z = \mathrm{i}$ pontban van a függvénynek szingularitása, ott a reziduuma $\left.\frac{e^{\mathrm{i}xz}}{z+\mathrm{i}}\right|_{z=\mathrm{i}} = \dfrac{e^{-x}}{2\mathrm{i}}$, ahonnan a feladat összefüggése azonnal adódik.



1. ábra. Reziduumtétel félkörlapon

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-transzformáltjait!

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = xe^{-x^2}$

Megoldás. a) Az $x \mapsto \exp(-x^2) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény integrálható $\mathbb{R}$-en, ezért a Fourier-transzformált klasszikus értelemben létezik. A Fourier-transzformált kiszámítására három módszert is mutatunk. A definíció alapján

$$(\mathscr{F}(x \mapsto \exp(-x^2)))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}x\xi} e^{-x^2}\, dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+\frac{\mathrm{i}\xi}{2})^2}\, dx.$$

Vegyük észre, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+w)^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

minden $w \in \mathbb{R}$ esetén, és így az unicitástételből következően minden $w \in \mathbb{C}$ esetén is. Emiatt

$$(\mathscr{F}(x \mapsto \exp(-x^2)))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right).$$

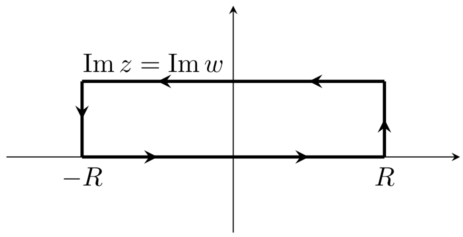
Érvelhetünk a következő módon is. Vegyük észre, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+w)^2}\, dx = \int_{\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w} e^{-z^2}\, dz,$$

vagyis az $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$ vízszintes egyenesen kell az e^{-z^2} függvény vonalintegrálját kiszámolnunk. Belátjuk, hogy minden vízszintes egyenesen a vonalintegrál ugyanannyi, így elég az x tengelyen, azaz $w = 0$ esetén kiszámolni, amit már megtettünk. Tekintsük az R, $R + \operatorname{Im} w$, $-R + \operatorname{Im} w$, $-R$ csúcspontok által meghatározott pozitív irányítású téglalapvonalat a komplex számsíkon (lásd a 2. ábrát). Mivel az e^{-z^2} függvény reguláris, ezért a téglalapvonalon vett integrál értéke 0. A téglalap függőleges oldalain $|e^{-z^2}| \le e^{-R^2}$, így a vonalintegrál értéke a két szakaszon legfeljebb $2Re^{-R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$. Ebből következően $R \to \infty$ esetén azt kapjuk, hogy az $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$ negatív irányítási egyenesen és a pozitív irányítású x tengelyen vett vonalintegrálok összege 0, tehát a pozitív irányítású vízszintes egyeneseken vett vonalintegrálok értéke megegyezik.

Végül okoskodhatunk a következőképpen is. Mivel $e^{-\mathrm{i}\xi x} = \cos(\xi x) - \mathrm{i}\sin(\xi x)$, és a sin páratlan függvény, ezért

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}x\xi} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\xi x)\, dx. \tag{1}$$



2. ábra. Téglalapon vett vonalintegrál

A jobb oldalon szereplő integrál ξ-ben egy paraméteres integrál. A paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételt alkalmazva, majd parciális integrálás után egy közönséges differenciálegyenletet nyerhetünk a keresendő függvényre. A részleteket illetően a BSc-s parcdiff gyakorlat 5. feladatsorának 5. Feladatát ajánljuk, ahol beláttuk, hogy tetszőleges $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ konstansok esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Ennek felhasználásával könnyen adódik a feladatban szereplő Fourier-transzformált is.

b) Az $x \mapsto x\exp(-x^2) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény integrálható $\mathbb{R}$-en, ezért a Fourier-transzformált klasszikus értelemben létezik. Definíció szerint

$$\mathscr{F}(x \mapsto x\exp(-x^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}x\xi} x e^{-x^2} \, dx.$$

Vegyük észre, hogy a fenti integrál nem más, mint a feladat a) részében szereplő (1) paraméteres integrál ξ szerinti deriváltjának i-szerese. Következésképpen

$$(\mathscr{F}(x \mapsto x\exp(-x^2)))(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right).$$

Természetesen mindezt az integrál felírása nélkül is láthattuk volna, hiszen a b) részben szereplő függvény az a) feladatban szereplő függvény deriváltjának $(-\frac{1}{2})$-szerese (vagy úgy is fogalmazhatunk, hogy az a) részbeli függvény x-szerese). Ezért használhatjuk a derivált Fourier-transzformáltjára vonatkozó (5) összefüggést. Sőt, tetszőleges m esetén az $x \mapsto x^m e^{-x^2}$ függvény Fourier-transzformáltját is meg tudjuk adni ennek segítségével $\beta = m$ és $\alpha = 0$ választással.

4. Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ és α multiindex. Igazoljuk, hogy az alábbi disztribúciók mindegyike temperált (azaz $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$-beli), majd számítsuk ki a Fourier-transzformáltjukat!

a) δ_a

b) 1

c) $\partial^\alpha \delta_a$

d) x^α

e) $\delta_{S_R(0)}$ $\quad (n = 3)$

Megoldás. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy kompakt tartójú disztribúció temperált. Valóban, a $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ térről az $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ térre való kiterjesztést az 1. feladatsor 4. Feladatában szereplő állítás biztosítja. Ennek megfelelően δ_a, $\partial^\alpha \delta_a$ és $\delta_{S_R(0)}$ mind temperált disztribúciók. Az $x \mapsto x^\alpha$ (speciálisan $|\alpha| = 0$ esetén az 1) lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúció kiterjesztését pedig értelmezzük a következő módon:

$$u(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x^\alpha}{1 + |x|^{|\alpha|+n+1}} (1 + |x|^{|\alpha|+n+1}) \varphi(x) \, dx.$$

Könnyen látható, hogy u jól definiált (ugyanis az $x \mapsto x^\alpha/(1 + |x|^{|\alpha|+n+1}$ függvény integrálható $\mathbb{R}^n$-en, mert az $x \mapsto 1/(1+|x|^{n+1})$ függvény is az (lásd a 6. feladatsor 3. Feladatát), továbbá az $x \mapsto (1+|x|^{|\alpha|+n})\varphi(x)$ függvény definíció szerint korlátos minden $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ esetén), lineáris és folytonos az $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergenciára nézve, továbbá kiterjesztése T_f-nek.

Emlékeztetünk arra a fontos összefüggésre, hogy ha $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ kompakt tartójú, akkor az u Fourier-transzformáltja, $\mathscr{F}(u)$, a következő g lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúció:

$$g(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} u[x \mapsto e^{-\mathrm{i}\langle \xi, x \rangle} \psi(x)],$$

ahol $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} u$ halmaz egy környezetében. Hasonlóan, ha $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ kompakt tartójú, akkor az u inverz Fourier-transzformáltja, $\mathscr{F}^{-1}(u)$, a következő h lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúció:

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} u[\xi \mapsto e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\psi(\xi)],$$

ahol $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} u$ halmaz egy környezetében.

a–b) Az $\mathscr{F}(\delta_a)$ transzformáltat kétféleképpen is kiszámoljuk. Definíció szerint $(\mathscr{F}(\delta_a))(\varphi) = (\delta_a)(\mathscr{F}(\varphi))$. Mivel $(\mathscr{F}(\varphi))(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}\langle \xi,x\rangle}\varphi(x)\,dx$, ezért

$$(\mathscr{F}(\delta_a))(\varphi) = (\delta_a)(\mathscr{F}(\varphi)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}\langle x,a\rangle}\varphi(x)\,dx,$$

vagyis $\mathscr{F}(\delta_a)$ a $\xi \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\mathrm{i}\langle \xi,a\rangle}$ függvényhez tartozó reguláris disztribúció.

Másképpen, a kompakt tartójú disztribúciók Fourier-transzformáltjára vonatkozó állításból következően

$$(\mathscr{F}(\delta_a))(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \delta_a[x \mapsto e^{-\mathrm{i}\langle \xi,x\rangle}\psi(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\mathrm{i}\langle \xi,a\rangle}, \tag{2}$$

továbbá

$$(\mathscr{F}^{-1}(\delta_a))(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \delta_a[y \mapsto e^{\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\psi(y)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\mathrm{i}\langle x,a\rangle}, \tag{3}$$

felhasználva, hogy $\psi(a) = 1$ (sőt egy egész környezetben is). Speciálisan $a = 0$ esetén $\mathscr{F}(\delta_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$, $\mathscr{F}^{-1}(\delta_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ (vagyis az $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ konstansfüggvényhez tartozó reguláris disztribúció). Ez utóbbi viszont azt jelenti, hogy $\mathscr{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0$, hiszen a linearitás miatt

$$\mathscr{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0. \tag{4}$$

Formálisan úgy is okoskodhatunk az inverz Fourier-transzformált kiszámításánál, hogy $\mathscr{F}^{-1}(u) = \widetilde{\mathscr{F}(u)}$, ahol általban $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})^n$ esetén $\widetilde{v}(\varphi) := v(\widetilde{\varphi})$, és a rövidség kedvéért $\widetilde{\varphi} = (x \mapsto \varphi(-x))$ (vagyis φ origóra vonatkozó tükörképe). Az összefüggés függvényekre a Fourier-transzformált definíciója alapján érvényes, hiszen

$$(\mathscr{F}^{-1}(\varphi))(x)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\varphi(y)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}\langle (-x),\xi\rangle}\varphi(\xi)\,dx = (\mathscr{F}(\varphi))(-x).$$

Ekkor

$$(\mathscr{F}^{-1}(u))(\varphi) = u(\mathscr{F}^{-1}(\varphi)) = u(\widetilde{\mathscr{F}(\varphi)}) = (\mathscr{F}u)(\overline{\varphi}) = (\mathscr{F}(\overline{u}))(\overline{\varphi}) = (\overline{\mathscr{F}(\overline{u})})(\varphi).$$

c–d) Elevenítsük most fel a Fourier-transzformáció és a deriválás kapcsolatára vonatkozó alábbi összefüggéseket:

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha(x^\beta u)) = \mathrm{i}^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\alpha\partial^\beta(\mathscr{F}(u)), \tag{5}$$

$$\mathscr{F}^{-1}(\partial^\alpha(\xi^\beta u)) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|+|\beta|}x^\alpha\partial^\beta(\mathscr{F}^{-1}(u)). \tag{6}$$

(A továbbiakban, ha nem félrevezető, akkor kissé pontatlanul fogjuk kezelni a függvény és helyettesítési értéke közötti különbséget, mindenesetre ξ-vel fogjuk jelölni a transzformált függvény változóját, és x-szel az eredeti változókat.) Ennek alapján a (2) és a (3) összefüggések alkalmazásával

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha\delta_a) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathscr{F}(\delta_a) = \frac{\mathrm{i}^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\xi^\alpha e^{-\mathrm{i}\langle \xi,a\rangle},$$

továbbá

$$\mathscr{F}^{-1}(\partial^\alpha\delta_a) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\delta_a) = \frac{(-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}x^\alpha e^{\mathrm{i}\langle x,a\rangle}.$$

Speciálisan $a = 0$ esetén

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha\delta_0) = \frac{\mathrm{i}^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\xi^\alpha, \qquad \mathscr{F}^{-1}(\partial^\alpha\delta_0) = \frac{(-\mathrm{i})^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}x^\alpha.$$

Ez utóbbi összefüggés folytán

$$\mathscr{F}(x^\alpha) = \mathrm{i}^{|\alpha|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\partial^\alpha\delta_0, \quad \mathscr{F}^{-1}(x^\alpha) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\partial^\alpha\delta_0.$$

e) Végül pedig számítsuk ki a $\delta_{S_R(0)}$ disztribúció Fourier-transzformáltját! Emlékeztetünk arra, hogy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ esetén

$$\delta_{S_R(0)}(\varphi) = \int_{S_R(0)} \varphi \, d\sigma.$$

Mivel $\delta_{S_R(0)}$ kompakt tartójú, ezért $\mathscr{F}(\delta_{S_R(0)})$ a következő g lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúció:

$$g(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \delta_{S_R(0)}[y \mapsto e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} \psi(y)],$$

ahol $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} \delta_{S_R(0)} = S_R(0)$ halmaz egy környezetében. Definíció alapján

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \delta_{S_R(0)}[y \mapsto e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} \psi(y)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{S_R(0)} e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} \psi(y) \, d\sigma_y = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{S_R(0)} e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} \, d\sigma_y.$$

A felszíni integrált gömbi koordinátákra való áttéréssel számítjuk ki úgy, hogy ϑ legyen a ξ vektorral bezárt szög $(0 < \vartheta \leq \pi)$, és a ξ tengelyre merőleges síkon vezetjük be az (r, φ) síkbeli polárkoordinátákat (tetszőlegesen). Ekkor a felületelem $d\sigma_y = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, így $\langle \xi, y\rangle = R|x| \cos\vartheta$ folytán

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{S_R(0)} e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} \, d\sigma_y &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\mathrm{i}R|\xi|\cos\vartheta} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \frac{R^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} e^{-\mathrm{i}R|\xi|\cos\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta \\
&= \frac{R^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-\mathrm{i}R|\xi|\cos\vartheta}}{R|\xi|\mathrm{i}} \right]_{\vartheta=0}^{\pi} \\
&= \frac{2R}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.
\end{aligned}$$

Megemlítjük, hogy a $\delta_{S_R(0)}$ disztribúció a gömbfelületen lévő úgynevezett (egységnyi sűrűségű) *egyszerű réteg*, amely az $S_R(0)$ gömbfelszín pontjaiban elhelyezett egységnyi töltéseket modellez. Az egyszerű réteg párja a kettős réteg, amely a gömbfelszín pontjaiban elhelyezett dipólusokat (pozitív és negatív töltés együttese) modellez.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g).$$

Megoldás. Ha $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, így a Fourier-transzformált klasszikus értelemben létezik. Definíció szerint

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(f * g) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y) e^{-\mathrm{i}\langle y, \xi\rangle} \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y - z) \, dz \right) e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} \, dy.$$

Felhasználva, hogy

$$e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} = e^{-\mathrm{i}\langle \xi, z\rangle} \cdot e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y - z\rangle},$$

Fubini tételének alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y - z) \, dz \right) e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y\rangle} \, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-\mathrm{i}\langle \xi, z\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y - z) e^{-\mathrm{i}\langle \xi, y - z\rangle} \, dy \right) dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-\mathrm{i}\langle \xi, z\rangle} \, dz \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(\tilde{y}) e^{-\mathrm{i}\langle \xi, \tilde{y}\rangle} \, d\tilde{y} = \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(f) \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(g).
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(f) \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(g),$$

ahonnan a bizonyítandó összefüggés azonnal adódik.

6. Feladat. Tegyük fel, hogy az $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvényre $f * f = f$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f = 0$ m.m. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $f * g = g$ minden $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén.

Megoldás. A megoldás előtt emlékeztetünk a Riemann–Lebesgue-lemmára, amely azt mondja, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény, akkor $\lim_{|\xi|\to+\infty}(\mathscr{F}(f))(\xi) = 0$.

Ezek után térjünk rá a feladatunkra. Az 5. Feladat alapján $\mathscr{F}(f) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathscr{F}(f * f) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathscr{F}(f))^2$. Ebből következően $(\mathscr{F}(f))(\xi) = \left\{(2\pi)^{\frac{n}{2}}, 0\right\}$, ahol (minden meggondolás nélkül) a két érték közül bármelyik választható. Azonban $\mathscr{F}(f)$ folytonos függvény, így a Riemann–Lebesgue-lemma miatt szükségképpen $\mathscr{F}(f) = 0$, vagyis $f = 0$ m.m.

A második részhez ismét a Fourier-transzformációt alkalmazzuk, ekkor $\mathscr{F}(g) = \mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$ minden $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy $\mathscr{F}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ m.m. $\mathbb{R}^n$-en, ami a Riemann–Lebesgue-lemma miatt lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy az integrálható függvények körében a konvolúció műveletére nézve nincs egységelem. A disztribúciók körében viszont már van, hiszen a 4. Feladat a) része alapján tudjuk, hogy $\mathscr{F}(\delta_0) = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$, így $f = \delta_0 *$. Természetesen már korábbról is tudtuk (lásd a 3. feladatsor 6. Feladatát), hogy $\delta_0 * u = u$ minden $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ esetén.

7. Feladat. Határozzuk meg az $y' = 0$ egyenlet összes $y \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását!

Megoldás. Mielőtt nekilátnánk a megoldásnak, először próbáljuk megsejteni. Az $y' = 0$ egyenletnek klasszikus értelemben létezik megoldása, mégpedig az összes konstansfüggvény. A disztribúciókat „csak a problémás függvények miatt vezettük be”, így jogosan várhatjuk el, hogy az $y' = 0$ egyenletnek a disztribúciók körében is csak a konstansfüggvények legyenek a megoldásai. Sejtjük tehát, hogy $y(\varphi) = T_c = \int_{\mathbb{R}} c\varphi = c\int_{\mathbb{R}}\varphi$.

Térjünk most rá a megoldásra. Az $y' = 0$ egyenlet a $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ téren azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre $y'(\varphi) = 0$, azaz $-y(\varphi') = 0$, tehát $y(\varphi') = 0$. Más szóval az y disztribúció az alapfüggvények deriváltjainak alterén 0. Belátjuk, hogy ez az altér egy kodimenziós, és ekkor készen leszünk. Ehhez próbáljunk meg egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényből egy alkalmas $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény levonásával egy $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény deriváltját előállítani, hogy az y disztribúciót alkalmazhassuk χ-re. Azt szeretnénk tehát, hogy $\varphi - \psi = \chi'$ legyen, ami csak úgy lehetséges, ha $\int_{\mathbb{R}}(\varphi - \psi) = 0$, hiszen χ kompakt tartójú, így $\chi(\infty) = \chi(-\infty) = 0$. A ψ függvényt úgy kell megválasztanunk, hogy $\int_{\mathbb{R}}\varphi = \int_{\mathbb{R}}\psi$ teljesüljön. Ezt megtehetjük például oly módon, hogy rögzítünk egy $\psi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $\int_{\mathbb{R}}\psi_1 = 1$ (ilyen függvény az 1. feladatsor 1. Megjegyzése alapján van). Ekkor a $\psi = \psi_1\int_{\mathbb{R}}\varphi$ függvény megfelelő, hiszen $\int_{\mathbb{R}}\psi = \int_{\mathbb{R}}\psi_1\int_{\mathbb{R}}\varphi = \int_{\mathbb{R}}\varphi$. A fentiekből következően minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén a $\varphi - \psi_1\int_{\mathbb{R}}\varphi$ függvény egy $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-beli függvény deriváltja, tehát $y(\varphi - \psi_1\int_{\mathbb{R}}\varphi) = 0$, és így $y(\varphi) = y(\psi_1)\int_{\mathbb{R}}\varphi = c\int_{\mathbb{R}}\varphi$, amit igazolni akartunk.

A feladatban valójában igazoltuk, hogy minden $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúciónak, ha létezik, akkor egyértelmű a „primitív disztribúciója” (azaz olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, amelyre $v' = u$). A létezés igazolása sem túl nehéz, a keresett disztribúciót meg lehet adni konkrétan.

Végül vegyük észre, hogy ha a Fourier-transzformáció segítségével próbáltunk volna okoskodni, akkor a derivált Fourier-transzformáltjára vonatkozó (5) összefüggés alapján $\mathrm{i}\xi\mathscr{F}(y) = 0$ adódik. Ez azt jelenti, hogy ekkor a 8. Feladatot kellene megoldanunk (mutatunk is erre egy Fourier-transzformációtól és a jelen feladattól független megoldást).

8. Feladat. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg az $xy = 0$ egyenlet összes $y \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!

Megoldás. Mielőtt belekezdenénk a megoldásba gondoljuk végig, mit is várunk. Az $xy = 0$ egyenletnek klasszikus értelemben egyetlen megoldása a konstans nulla függvény. Vajon kaphatunk-e a disztribúciók körében más megoldást? Képzeletben x-szel osztva, a $0/x$ „függvény” megoldás, amely nagyon hasonlít a Dirac-deltához (mindenhol 0, a 0-ban $0/0$, tehát „akár végtelen is lehet”). Sejtjük tehát, hogy a disztribúciók körében lesznek más megoldások is, méghozzá a Dirac-delta és konstansszorosai.

Térjünk most rá a megoldásra! Alkalmazzuk a Fourier-transzformációt az egyenlet mindkét oldalára, ekkor az (5) összefüggés $\alpha = 0$, $\beta = 1$ speciális esetének felhasználásával kapjuk, hogy $i(\mathscr{F}(y))' = 0$, vagyis $(\mathscr{F}(y))' = 0$. A 7. Feladatban láttuk, hogy ennek az egyenletnek a $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-beli megoldásai a konstansfüggvények, tehát $\mathscr{F}(y) = c \in \mathbb{R}$. Végül az inverz Fourier-transzformáció alkalmazásával a (4) összefüggés figyelembe vételével $y = C\delta_0$ adódik, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Oldjuk most meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is! A megoldás ötlete hasonló a 7. Feladat megoldásához. Az $xy = 0$ egyenlet azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvényre $0 = (xy)(\varphi) = y(x\varphi)$, vagyis az $y \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció minden $x\varphi$ alakú alapfüggvényen 0 értéket vesz fel. Próbáljunk meg egy tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ függvényt egy $x\psi$ alakú alapfüggvény és a „maradék” összegeként előállítani. Némi gondolkodás (és intuíció) után rájöhetünk, hogy a következőképpen érdemes eljárnunk. Legyen $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan alapfüggvény, amely 1-gyel egyenlő a $[-\varepsilon, \varepsilon]$ intervallumon ($\varepsilon > 0$ tetszőleges), továbbá $\eta = 0$ a $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ intervallumon kívül (ilyen függvény van, lásd például az 1. feladatsor megoldásában szereplő 1. Megjegyzést). Tekintsük ekkor $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén a következő felbontást:

$$\varphi(x) = x\frac{\varphi(x) - \varphi(0)\eta(x)}{x} + \varphi(0)\eta(x).$$

Egy pillanatra fogajuk el, hogy az $\psi(x) := \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\eta(x)}{x}$ függvény $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-beli. Ekkor

$$y(\varphi) = y(\varphi) = y(x\psi + \varphi(0)\eta(x)) = y(x\psi) + \varphi(0)y(\eta) = y(x\psi) + y(\eta) \cdot \delta_0(\varphi),$$

azaz a $C = y(\eta)$ konstanssal $y = C\delta_0$. Hátra van még a $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ igazolása. Világos, hogy ψ kompakt tartójú (hiszen φ és η is az), így csak a végtelen sokszor való differenciálhatóságot kell bizonyítanunk, és ez is nyilván csak az $x = 0$ pontban kérdéses. Vegyük észre, hogy a 0 pont $[-\varepsilon, \varepsilon]$ környezetében $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$, így elég e függvény differenciálhatóságával foglalkoznunk. A Newton–Leibniz-tétel alapján

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(z)\,dz = x\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt,$$

így

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt.$$

Vegyük észre, hogy a $\mu(x) := \varphi'(tx)$ függvény végtelen sokszor differenciálható, $\mu^{(k)}(x) = t^k\varphi^{(k+1)}(tx)$, így $|\mu^{(k)}| \le \max|\varphi^{(k+1)}|$, vagyis az integrandus tetszőleges rendű, paraméter szerinti deriváltjának van a paramétertől független integrálható majoránsa. Alkalmazható tehát a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tétel, ezért ψ is végtelen sokszor differenciálható. Sőt, azt is tudjuk, hogy

$$\psi^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k\varphi^{(k+1)}(tx)\,dt,$$

ahonnan speciálisan $x = 0$ esetén

$$\psi^{(k)}(0) = \int_0^1 t^k\varphi^{(k+1)}(0)\,dt = \frac{\varphi^{(k+1)}}{k+1}.$$

Jegyezzük végül meg, hogy amennyiben φ analitikus függvény (tehát a Taylor-sor előállítja), akkor

$$\psi(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k - \varphi(0)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k+1}}{k!}x^k,$$

ahonnan ugyancsak látszik, hogy $\psi^{(k)}(0) = \frac{\varphi^{(k+1)}}{k+1}$.

9. Feladat. A Fourier-transzformáció segítségével keressük meg az $x^m y = 0$ ($m \in \mathbb{N}$) egyenlet összes $y \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!

Megoldás. Alkalmazzuk a Fourier-transzformációt az egyenlet mindkét oldalára, ekkor a Fourier-transzformáció és a deriválás kapcsolatának felhasználásával kapjuk, hogy $i^m(\mathscr{F}y)^{(m)} = 0$, vagyis $(\mathscr{F}(y))^{(m)} = 0$. A 6. Feladatban láttuk, hogy egy disztribúciónak a konstansfüggvényhez tartozó disztribúciótól eltekintve egyértelműen létezik „primitív disztribúciója". Ebből következően (ahogy függvények esetében is, például indukcióval adódik, hogy) $(\mathscr{F}(y))(\xi) = c_0 + c_1\xi + \cdots + c_{m-1}\xi^{m-1}$. Az inverz Fourier-transzformáció alkalmazásával, és a Dirac-delta deriváltjai Fourier-transzformáltjainak figyelembe vételével (lásd a 4. Feladatot) kapjuk, hogy $y = C_0\delta_0 + C_1\delta_0' + \cdots + C_{m-1}\delta_0^{(m-1)}$.

Oldjuk most meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül! Használjuk a 8. Feladat ötletét és eredményeit. Az egyszerűség kedvéért először az $m = 2$ esettel foglalkozunk. Ekkor az $x^2y = 0$ azt jelenti, hogy a $z = xy$ disztribúcióra teljesül az $xz = 0$ egyenlet, így a 8. Feladat szerint $z = C\delta_0$ tetszőleges $C \in \mathbb{R}$ konstanssal. Következésképpen $xy = C\delta_0$. Legyen most $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tetszőleges, és tekintsük a $\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(0)\eta(x)$ felbontást (lásd a 8. Feladat megoldását!). Ekkor

$$y(\varphi) = y(\varphi) = y(x\psi) + \varphi(0)y(\eta) = C\psi(0) + y(\eta)\cdot\delta_0(\varphi) = C\varphi'(0) + C_0\delta_0(\varphi) = C_1\delta_0'(\varphi) + C_0\delta_0(\varphi),$$

ahol felhaszáltuk a 8. Feladatban igazolt $\psi(0) = \varphi'(0)$ összefüggést. Azt kaptuk tehát, hogy $m = 2$ esetén $y = C_0\delta_0 + C_1\delta_0'$. Tetszőleges m esetén indukcióval okoskodhatunk, felhasználva, hogy $\psi^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1}\varphi^{(k+1)}(0)$. A részletek meggondolását az Olvasóra bízzuk.