A 3. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Feladat. Jelölje $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, mérhető halmaz esetén χ_H a halmaz karakterisztikus függvényét és legyen $\lambda(H)$ a halmaz Lebesgue-mértéke. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, mérhető halmazokra

$$(\chi_A * \chi_B)(x) = \lambda(A \cap (x - B)) = \lambda((x - A) \cap B) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Megoldás. A konvolúció definíciója alapján $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(\chi_A * \chi_B)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(y)\chi_B(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x-y)\chi_B(y)\,dy.$$

Világos, hogy minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén az $y \mapsto \chi_B(x-y)$ függvény megegyezik az $y \mapsto \chi_{x-B}$ függvénnyel (hiszen $(y-x) \in B$ ekvivalens $y \in (x-B)$-vel), ahol az $x - B$ halmazt B-ből origóra való tükrözéssel és x-szel való eltolással nyerjük. Hasonlóan, AZ $y \mapsto \chi_A(x-y)$ függvény megegyezik az $y \mapsto \chi_{x-A}$ függvénnyel. Mivel karakterisztikus függvények szorzata a megfelelő halmazok metszetének karakterisztikus függvénye, továbbá karakterisztikus függvény integrálja $\mathbb{R}^n$-en a halmaz Lebesgue-mértéke, így végül azt kapjuk, hogy

$$(\chi_A * \chi_B)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\cap(x-B)}(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(x-A)\cap B}(y)\,dy = \lambda(A \cap (x-B)) = \lambda((x-A) \cap B).$$

A feladat állítását szemléletesen a következőképpen is fogalmazhatjuk: két mérhető halmaz karakterisztikus függvényének konvolúcióját úgy nyerjük, hogy az egyik halmaz tükörképét a tér minden pontjába eltoljuk (azaz $(-B)$ „végigpásztázza a teret”) és tekintjük az eltolt halmaz metszetét a másikkal. Vagy ezzel ekvivalensen, a χ_{-B} függvény grafikonja alatti hasáb „pásztázza végig az $(n+1)$-dimenziós teret” (mint egy „ablak”) és tekintjük a χ_A függvény grafikonja alatti hasábbal való metszetének $(n+1)$-dimenziós térfogatát.

Megjegyezzük, hogy ha A és B Lebesgue-mértéke 1, akkor χ_A és χ_B valószínűségi sűrűségfüggvények. Ekkor $\chi_A * \chi_B$ ugyancsak valószínűségi sűrűségfüggvény, mégpedig az A és B halmazokhoz tartozó független indikátor valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvénye.

2. Feladat. Határozzuk meg a $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$, $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ függvényeket!

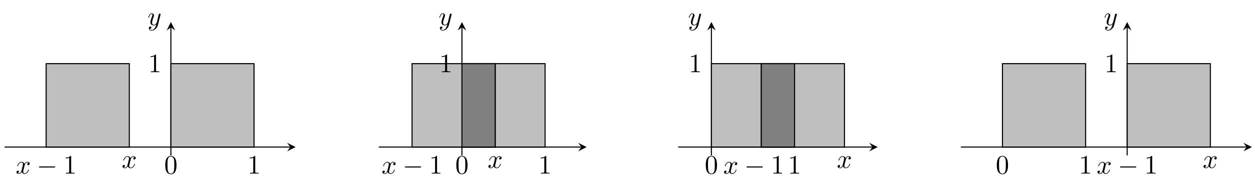
Megoldás. Az 1. Feladat alapján $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]})(x) = \lambda([0,1] \cap (x - [0,1])) = \lambda([0,1] \cap (x + [-1,0])).$$

Szemléletesen a $[-1,0]$ intervallum eltoltjaival (vagy az efölé rajzolt egységnégyzettel) „végigpásztázzuk” a számegyenest, és az eltolt intervallumoknak tekintjük a $[0,1]$ intervallummal vett metszetének hosszát (vagy az eltolt négyzet és a $[0,1]$ intervallum fölé rajzolt egységnégyzet metszetének területét). Világos, hogy $x <$ esetén $[0,1] \cap (x + [-1,0])$ üreshalmaz, $0 \le x \le 1$ esetén $[0,1] \cap (x + [-1,0]) = [0,x]$, így mértéke (vagyis hossza) x, ezenkívül $1 \le x \le 2$ esetén $[0,1] \cap (x + [-1,0]) = [x-1,1]$, amelynek mértéke (azaz hossza) $2-x$, végül $x > 2$ esetén $[0,1] \cap (x + [-1,0])$ ismét üreshalmaz. Az előbbieket az 1. ábra szemlélteti. Könnyen látható, hogy a konvolúció szimmetrikus lesz az 1 pontra, így $f(x) = f(2-x)$, tehát valójában elég $x \le 1$ esetén kiszámolni az értékeket, ebből a többi már adódik. Végeredményben tehát

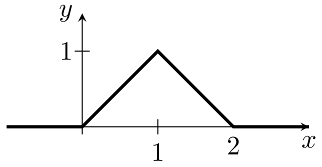
$$\left(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}\right)(x) \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ x, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & \text{ha } 1 \le x \le 2, \\ 0, & \text{ha } x > 2, \end{cases}$$

amely egy „sátorfüggvény” (és ismét sűrűségfüggvény), lásd a 2. ábrát.



0, ha $x < 0$ x, ha $0 \le x < 1$ $2-x$, ha $1 \le x \le 2$ 0, ha $x > 2$

1. ábra. A $\left(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}\right)(x)$ értékei



2. ábra. A $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ függvény

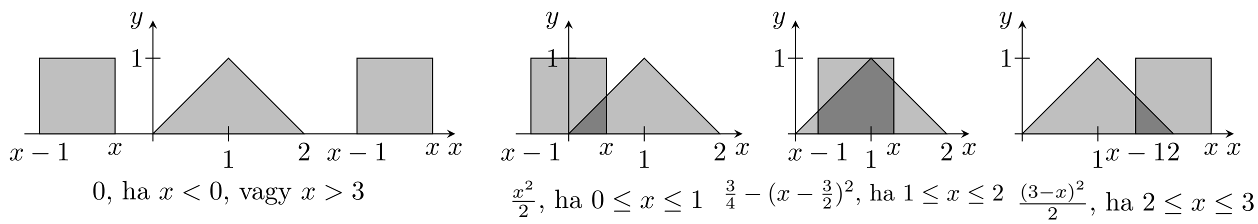
Határozzuk most meg a $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ függvényt. A konvolúció definíciója alapján (illetve az 1. Feladat megoldásában alkalmazott gondolatok felhasználásával)

$$(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]})(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}\right)(y)\chi_{[0,1]}(x-y)\,dy = \int_{x+[-1,0]} \left(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}\right)(y)\,dy.$$

Szemléletesen ismét tekintenünk kell a $[-1,0]$ intervallum eltoltjait, majd az eltoltakon venni a $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ függvény integrálját (még szemléletesebben, az egységnégyzet „végigpásztázza” a számegyenest és közben tekintjük a $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ függvény grafikonja alatti síkidommal vett metszetének területét). Könnyen látható, hogy a konvolúció szimmetrikus lesz a 2 pontra, így $f(x) = f(3-x)$, tehát valójában elég $x \leq 2$ esetén kiszámolni az értékeket, ebből a többi már adódik. Ekkor a 3. ábra segítségével a következő függvényt nyerjük (lásd a 4. ábrát):

$$\left(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}\right)(x) \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{3}{4} - (x-\frac{3}{2})^2, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{(3-x)^2}{2}, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

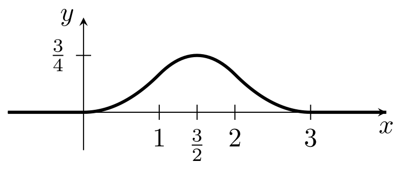
(Vegyük észre, hogy a kapott függvények lokálisan integrálhatóak, sőt integrálható, így a konvolúció létezik az erős értelemben is.) A kapott függvény ismét sűrűségfüggvény, három egymástól független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlás összegének sűrűségfüggvénye. Érdemes megjegyeznünk, hogy várhatóan a $\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}$ konvolúció (megfelelő eltolás és normálás után) a tényezők számának növelésével a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez fog tartani a centrális határeloszlás-tétel szerint.



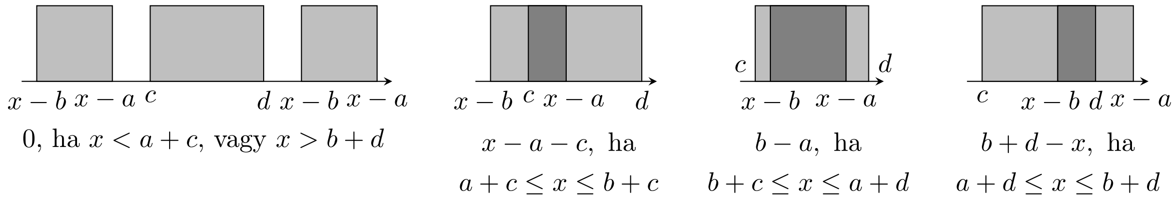
3. ábra. A $\left(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}\right)(x)$ értékei

3. Feladat. Legyenek $[a,b], [c,d] \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallumok. Adjuk meg a $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ függvényt!

Megoldás. Az általánosítás megszorítása nélkül feltehető, hogy például $[a,b]$ a nem hosszabb intervallum, azaz $b-a \leq d-c$, és így $b+c \leq a+d$, amelyre a későbbiekben szükségünk lesz. Az 1. és 2. Feladatokban leírtak alapján a $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ konvolúciót úgy nyerjük, hogy például a $[-b,-a]$ intervallum eltoltjaival „végigpásztázzuk” a számegyenest és tekintjük az eltolt és az $[a,b]$ intervallum metszetének mértékét, azaz hosszát (vagy tekintjük a megfelelő intervallumok fölé rajzolt téglalapok metszetének területét). Könnyen látható (lásd az 5. ábrát), hogy $x < a+c$ esetén az $x + [-b,-a]$ intervallum nem metsz bele $[c,d]$-be, $a+c \leq b+c$ esetén $(x+[-b,-a]) \cap [c,d]$



4. ábra. A $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ függvény

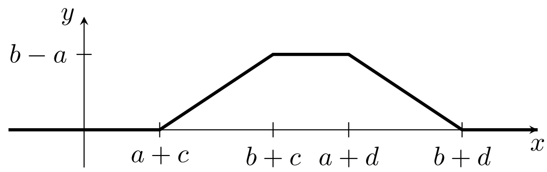


5. ábra. A $\left(\chi_{[a,b]} * \chi_{]c,d]}\right)(x)$ értékei

hossza $x-a-c$, $b+c \le x \le a+d$ esetén $(x+[-b,-a]) \cap [c,d]$ hossza $b-a$ (vagyis a rövidebbik szakasz hossza), $a+d \le b+d$ esetén $(x+[-b,-a]) \cap [c,d]$ hossza $b+d-x$, végül $x > b+d$ esetén a metszet üreshalmaz. Könnyen látható, hogy a konvolúció szimmetrikus lesz az $\frac{a+b+c+d}{2}$ pontra, így $f(x) = f(a+b+c+d-x)$, tehát valójában elég $x \le \frac{a+b+c+d}{2}$ esetén kiszámolni az értékeket, ebből a többi már adódik. Összefoglalva (lásd a 6. ábrát):

$$(\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]})(x) \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a+c, \\ x-a-c, & \text{ha } a+c \le x \le b+c, \\ b-a, & \text{ha } b+c \le x \le a+d, \\ b+d-x, & \text{ha } a+d \le x \le b+d, \\ 0, & \text{ha } x > b+d. \end{cases}$$

(Vegyük észre, hogy a kapott függvény lokálisan integrálható, sőt integrálható, így a konvolúció létezik az erős értelemben is.)



6. ábra. A $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ függvény

4. Feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. Mutassuk meg, hogy $(f * f)(x) = e^{-|x|}(1+|x|)$.

Megoldás. Először is vegyük észre, hogy mivel f páros függvény ezért $f * f$ is páros. Valóban,

$$(f*f)(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)f(-x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)f(x-(-y))\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)f(x-z)\,dz = (f*f)(x).$$

Feltehető tehát, hogy $x \ge 0$. Az abszolútérték előjelváltása miatt az integrált három részintervallumra bontjuk:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)f(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} f(y)f(x-y)\,dy + \int_{0}^{x} f(y)f(x-y)\,dy + \int_{x}^{+\infty} f(y)f(x-y)\,dy.$$

Az $y = x-z$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} f(y)f(x-y)\,dy = \int_{0}^{+\infty} f(x-z)f(z)\,dz,$$

így elég két integrált kiszámolnunk. A $[-\infty, 0]$ intervallumon

$$\int_{-\infty}^{0} f(y)f(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} e^{y}e^{y-x}\,dy = \int_{-\infty}^{0} e^{2y-x}\,dy = \left[\frac{1}{2}e^{2y-x}\right]_{y=-\infty}^{0} = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

A $[0,x]$ intervallumon pedig

$$\int_{0}^{x} f(y)f(x-y)\,dy = \int_{0}^{x} e^{-y}e^{y-x}\,dy = \int_{0}^{x} e^{-x}\,dy = xe^{-x}.$$

Ezek alapján $x \ge 0$ esetén

$$(f*f)(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} = e^{-x}(1+x),$$

amnelyet páros függvényként kiterjesztve $x < 0$ esetén kapjuk, hogy

$$(f * f)(x) = e^{-|x|}(1 + |x|).$$

(Vegyük észre, hogy a kapott függvény lokálisan integrálható, sőt integrálható, így a konvolúció létezik az erős értelemben is.)

5. Feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$. Mutassuk meg, hogy $(f * f)(x) = \dfrac{2(2+2|x|)}{(2+|x|)|x|} \log(1+|x|)$.

Megoldás. A 4. Feladat megoldásához hasonlóan járunk el, f páros függvény, ezért $f * f$ is páros. Az integrált az abszolútérték miatt három részre bontjuk, a részintegrálok közül pedig elég kettőt kiszámolnunk. A $(-\infty, 0]$ intervallumon

$$\int_{-\infty}^{0} f(y)f(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-y)(1+x-y)}\,dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+x-y}\right) dy =$$
$$= \frac{1}{x}\left[\log\left(\frac{|1+x-y|}{|1-y|}\right)\right]_{y=-\infty}^{0} = \frac{1}{x}\log(1+x).$$

Vegyük észre, hogy a kapott formula $x = 0$ esetén is érvényes (legalábbis határértékben), hiszen

$$\int_{-\infty}^{0} f(y)f(-y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+y)^2}\,dy = 1,$$

és

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

A második részintegrált hasonlóan számolhatjuk:

$$\int_{0}^{x} f(y)f(x-y)\,dy = \int_{0}^{x} \frac{1}{(1+y)(1+x-y)}\,dy = \int_{0}^{x} \frac{1}{2+x}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+x-y}\right) dy =$$
$$= \frac{1}{2+x}\left[\log\frac{|1+y|}{1+x-y|}\right]_{y=0}^{x} = \frac{2}{2+x}\log(1+x).$$

Ezek alapján $x \geq 0$ esetén

$$(f * f)(x) = \frac{1}{x}\log(1+x) + \frac{2}{2+x}\log(1+x) + \frac{1}{x}\log(1+x),$$

amnelyet páros függvényként kiterjesztve $x < 0$ esetén kapjuk, hogy

$$(f * f)(x) = \frac{2}{|x|}\log(1+|x|) + \frac{2}{2+|x|}\log(1+|x|) = \frac{2(2+2|x|)}{(2+|x|)|x|}\log(1+|x|).$$

(Vegyük észre, hogy a kapott függvény lokálisan integrálható, így a konvolúció létezik az erős értelemben is.)

6. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Hogyan hatnak a $\delta_a * \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $\delta_a * T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre?

Megoldás. Disztribúciók konvolúciójának definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(\delta_a * \delta_b)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (\delta_a \times \delta_b)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)],$$

ahol a $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ függvénysorozatra $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$, ami definíció szerint azt jelenti, hogy minden α multiindexre $\partial^\alpha(\zeta_k - 1) \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kompakt részhalmazán, továbbá $|\partial\zeta_k| \leq C_\alpha$ valamilyen $C_\alpha > 0$ konstanssal. A 2. feladatsor 1. Feladatának megoldásában igazoltuk, hogy $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}$, így a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergenciából következő pontonkénti konvergencia felhasználásával kapjuk, hogy

$$(\delta_a * \delta_b)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \zeta_k(a,b)\varphi(a+b) = \varphi(a+b) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

tehát $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Hasonlóan, a 2. feladatsor 1. Feladata alapján

$$(\delta_a \times T_f)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(a,y)\,dy \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

ezért a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergenciából következő pontonkénti konvergencia és φ kompakt tartójú voltának figyelembe vételével

$$(\delta_a * T_f)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\zeta_k(a,z)\varphi(a+z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(a+z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z-a)\varphi(z)\,dz = T_{z\mapsto f(z-a)}(\varphi).$$

Ez azt jelenti, hogy $\delta_a * T$ reguláris disztribúció, amely a $(-a)$-val eltolt $z \mapsto f(z-a)$ függvényhez tartozik. Megjegyezzük, hogy $a = 0$ esetén a fenti összefüggések a $\delta_0 * \delta_b = \delta_b$, $\delta_0 * T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(z)\,dz = T_f(\varphi)$ alakra egyszerűsödnek. Általában is igaz, és nem nehéz belátni, hogy tetszőleges $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ esetén $\delta_0 * u = u$. A disztribúciók körében tehát a konvolúció műveletére nézve a δ_0 disztribúció egységelem. A függvények körében a konvolúció műveletére nézve nincs egységelem (lásd a 2. Feladatsor 6. Feladatát), csak úgynevezett approximatív egységek vannak, lásd az 1. feladatsor megoldásában szereplő 1. Megjegyzést.

7. Feladat. Adjunk meg olyan (Dirac-deltától különböző) $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciókat, amelyekre

a) $(u * v)(\varphi) = \partial_1^2\varphi(1,1)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén;

b) $(u * v)(\varphi) = \partial_1\varphi(1,1) + \partial_1\partial_2\varphi(2,2)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén.

Megoldás. a) Vegyük észre, hogy

$$\partial_1^2\varphi(1,1) = (\partial_1^2\delta_{(1,1)})(\varphi).$$

A 6. feladat megoldása alapján $\delta_{(1,1)} = \delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} * \delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$, így a konvolúció és derivált kapcsolatát felhasználva $u = \partial_1\delta_{(1,1)}$ esetén

$$\partial_1^2\delta_{(1,1)} = \partial_1^2(\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} * \delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}) = (\partial_1\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}) * (\partial_1\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}),$$

tehát $u = v = \partial_1\delta_{(1,1)})$ kielégíti a feladat kívánalmait.

b) Vegyük észre, hogy

$$\partial_1\varphi(1,1) + \partial_1\partial_2\varphi(2,2) = -\partial_1\delta_{(1,1)}(\varphi) + \partial_1\partial_2\delta_{(2,2)}(\varphi).$$

Ismét használjuk a 6. Feladat megoldásának eredményét, valamint a konvolúció és derivált kapcsolatát, így $\partial_1\delta_{(1,1)} = (\partial_1\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}) * (\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})})$, $\partial_1\partial_2\delta_{(2,2)} = (\partial_1\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}) * (\partial_2\delta_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})})$. Ebből következően $u = \partial_1\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ és $v = -\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} + \partial_2\delta_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}$ esetén a konvolúció linearitás folytán

$$u * v = (\partial_1\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})})) * (-\delta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} + \partial_2\delta_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}) = -\partial_1\delta_{(1,1)} + \partial_1\partial_2\delta_{(2,2)}.$$

Egy másik lehetőség például $u = \partial_1\delta_{(1,1)}$ és $v = -\delta_{(0,0)} + \partial_2\delta_{(1,1)}$.

8. Feladat. Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre létezik $u * v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v},$$

ahol $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{y + z \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp} u, z \in \operatorname{supp} v\}$. Adjunk meg olyan u és v disztribúciókat, amelyek esetében szigorú tartalmazás teljesül. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség áll fenn.

Megoldás. A bizonyítás a függvények körében értelmezett konvolúcióra vonatkozó analóg állítás bizonyításához hasonlóan történik, valamint a példák is ennek megfelelően adódnak.

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v} \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(u*v)$, és így a komplementer halmazokra $\operatorname{supp}(u*v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$ következik. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$, ekkor $\overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$ zártsága folytán x-nek van olyan U_x környezete, hogy $U_x \cap \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v} = \emptyset$. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$. A konvolúció definíciója alapján

$$(u * v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)].$$

Vegyük észre, hogy $y \in \operatorname{supp} u$, $z \in \operatorname{supp} v$ esetén $y + z \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}^n \setminus U_x \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\varphi$, azaz $(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)$ azonosan 0, így

$$\operatorname{supp}[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] \subset \mathbb{R}^{2n} \setminus (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v),$$

a 2. feladatsor 4. Feladata szerint azonban $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$, ezért

$$(u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] = 0,$$

és így $(u * v)(\varphi) = 0$, ami azt jelenti, hogy $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(u * v)$.

Szigorú tartalmazáshoz tekintsük például az $u = T_1$ és $v = T_f$ disztribúciókat $\mathbb{R}$-en, ahol

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1], \\ -1, & \text{ha } x \in [-1,0), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{1}$$

Ekkor az 1. feladatsor 1. Feladatának alapján $\operatorname{supp} T_1 = \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} T_f = [-1,1]$, így $\overline{\operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} f} = \mathbb{R}$. Ezenkívül $f * g$ függvény értelemben létezik, hiszen

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot f(y)\, dy = 0,$$

vagyis $f * g = 0$, és így $\operatorname{supp}(f * g) = \emptyset \subsetneq \mathbb{R}$.

Egyenlőséghez tekintsük az $u = v = \delta_0$ disztribúciókat. Ekkor a 6. Feladat alapján $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, továbbá az 1. feladatsor 1. Feladata szerint $\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$, így $\operatorname{supp}(\delta_0 * \delta_0) = \{0\} = \{0\} + \{0\}$.

Az alábbiakban megadunk $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvényeket, amelyekre $f*g$ függvény értelemben létezik, továbbá $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \supsetneq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, ekkor $T_f * T_g = T_{f*g}$ disztribúció értelemben létezik, és az 1. feladatsor 1. Feladata alapján $\operatorname{supp}(T_f * T_g) = \overline{\operatorname{supp} T_f + \operatorname{supp} T_g}$. Megjegyezzük, hogy a lezárás szükségessége azon az egyszerű észrevételen múlik, hogy két zárt halmaz összege nem feltétlenül zárt halmaz, azonban a tartóknak $\Omega = \mathbb{R}^n$ esetén zártaknak kell lenniük.

Mindenekelőtt tekintsük a $H_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2^x\}$ és $H_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2^{-x}\}$ halmazokat. Először megmutatjuk, hogy $H_1 + H_2 = \mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Az világos, hogy $H_1 + H_2$-ben csak olyan (x,y) pontok lehetnek, amelyekre $y > 0$. Azt kell belátnunk, hogy minden rögzített $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ esetén léteznek x_1 és x_2 valós számok, hogy

$$x_0 = x_1 + x_2, \tag{2}$$

$$y_0 = 2^{x_1} + 2^{-x_2}. \tag{3}$$

A (2) egyenletből $x_2 = x_0 - x_1$, ezt a (3) egyenletbe helyettesítve rendezés után $y_0 = 2^{x_1}(1 + 2^{-x_0})$, ahonnan egyértelműen adódik $x_1 = \log_2\left(\frac{y_0}{1+2^{-x_0}}\right)$, és ebből x_2-t is egyértelműen nyerjük.

Ezután vegyünk K_1 és K_2 halmazokat, amelyekre $H_i \in \operatorname{int} K_i$, és a K_i halmaz Lebesgue-mértéke 1 (azaz „felfújjuk a H_i halmazokat). Ilyen halmazok vannak, hiszen a H_1, H_2 halmazok 0 Lebesgue-mértékűek $\mathbb{R}^2$-ben: osszuk fel például a halmazokat megszámlálhatóan végtelen sok véges hosszú diszjunkt részívre, és a k-adik véges részívet fedjük le egy $\frac{1}{2^k}$ területű halmazzal.

Legyen f a K_1, illetve g a K_2 halmaz karakterisztikus függvénye (tehát az a függvény, amelynek értéke 1 az adott halmazon és 0 azon kívül). Világos, hogy $\operatorname{supp} f = K_1$, $\operatorname{supp} g = K_2$ és vegyük észre, hogy $K_1 + K_2 = \mathbb{R}^2_+$. Állítjuk, hogy függvény értelemben létezik $f * g$, továbbá $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\mathbb{R}^2_+} \supsetneq \mathbb{R}^2_+ = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Az 1. Feladat alapján az $f * g$ függvény úgy nyerjük, hogy az $(x,y) - K_2$ halmazzal „végigpásztázzuk" a síkot és vesszük az eltolt és a K_1 halmaz metszetének mértékét. Gondoljunk meg, hogy rögzített $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén az $(x,y) \mapsto f(x,y)g((x_0,y_0) - (x,y))$ függvény tartója a $K_1 \cap ((x_0,y_0) - K_2)$ halmaz. Az $(x_0,y_0) - K_2$ „lefelé álló exponenciális tartomány" pontosan akkor metszi a K_1 „felfelé álló exponenciális tartományt", ha K_2-t az x tengely fölé toljuk el, azaz $y_0 > 0$. Ekkor a metszeten területe legfeljebb K_1 Lebesgue-mértéke, amely 1. Azt kaptuk tehát, hogy $(f * g)(x,y)$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik és legfeljebb 1 az értéke, tehát teljesülnek a konvolúció definíciójában megfogalmazott feltételek, ezért $f * g$ értelmes. Azt is láttuk, hogy $(f * g)(x,y) \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $y > 0$, és így $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\mathbb{R}^2_+}$, hiszen $y < 0$ esetén minden pontnak van olyan környezete, ahol $f*g$ azonosan 0. Jegyezzük meg, hogy $f*g$ korlátos függvény, így a konvolúció az erős értelemben létezik.

Megjegyezzük, hogy például a $H_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 1/x\}$ és $H_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = -1/x\}$ halmazok esetén is igaz, hogy $H_1 + H_2$ a nyílt félsíkkal egyezik meg (bizonyítsuk be!).

Egy másik (csak disztribúciók körében) lehetséges példa a lezárás szükségességére a következő. Legyen $H_1 = \left\{1 + \frac{1}{1}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, \dots\right\} \subset \mathbb{R}$ és $H_2 = \{-1, -2, -3, \dots\} \subset \mathbb{R}$. Az 1. feladatsor 3. Feladatának megoldásában láttuk, hogy vannak olyan $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}$ disztribúciók, amelyekre $\operatorname{supp} u = H_1$ és $\operatorname{supp} v = H_2$, mégpedig (például)

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \delta_{j+\frac{1}{j}}, \qquad v = \sum_{j=}^{\infty} \frac{1}{2^j} \delta_{-j}.$$

Ekkor abszolút konvergens sorok tetszőleges sorrendben való összeszorozhatósága miatt, továbbá a 6. Feladat alapján

$$u * v = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2^j} \delta_{j+\frac{1}{j}}\right) * \left(\frac{1}{2^k} \delta - k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + j} \delta_{j-k+\frac{1}{j}}.$$

Könnyen látható (hasonlóan az 1. feladatsor 2. Feladatában szereplő disztribúcióhoz), hogy supp $u*v$ tartalmazza a $j-k+\frac{1}{j}$ alakú valós számokat, vagyis az egész H_1+H_2 halmazt. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{supp} u*v$ tartalmazza az összes $\frac{1}{j}$ alakú valós számot, de a 0-t nem. Mivel az alapterünk most $\mathbb{R}$ így $u*v$ tartójának zártnak kell lennie, ezért szükségképpen tartalmaznia kell az $\overline{H_1+H_2}$ halmazt is.

9. Feladat. Legyenek $u,v,w\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a következő disztribúciók: $u=T_H$, $v=\delta_0'$ és $w=T_1$ (ahol H a Heaviside-függvényt, az 1 pedig az azonosan 1 függvényt jelöli). Bizonyítsuk be, hogy $(u*v)*w$ és $u*(v*w)$ létezik, de nem egyenlőek.

Megoldás. A konvolúció és a deriválás kapcsolatának, illetve a 6. Feladat eredményének felhasználásával

$$(u*v)*w=(T_H*\delta_0')*T_1=(T_H'*\delta_0)*T_1=(\delta_0*\delta_0)*T_1=T_1.$$

Az előbb kihasználtuk, hogy $T_H*\delta_0$ létezik, és így $T_H*\delta_0'=T_H'*\delta_0$ (különben nem mindegy, hogy a konvolúció mely tényezőjét deriváljuk). Ugyanakkor

$$u*(v*w)=T_H*(\delta_0'*T_1)=T_H*T_1'=T_H*T_{1'}=T_H*0=0.$$

Megjegyezzük, hogy a bajt az okozta, hogy T_H*T_1 nem létezik, ezért $T_H*T_{1'}\neq T_{H'}*T_1$.

10. Feladat. Legyen $u=v=T_1\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $w=\delta_0'\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Igazoljuk, hogy $u*(v*w)$ értelmes, de $(u*v)*w$ nem létezik.

Megoldás. A konvolúció definíciója alapján $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(T_1*T_1)(\varphi)=\lim_{k\to\infty}(T_1\times T_1)[(y,z)\to\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)\,dy\,dz.$$

Világos, hogy $\varphi=\eta_{0,r}$ esetén, ahol $\eta_{0,r}$ az 1. feladatsor megoldásában szereplő 1. Megjegyzésben értelmezett $\eta_{a,r}$ függvény, $\operatorname{supp}[(y,z)\mapsto\varphi(y+z)]=\{(y,z)\in\mathbb{R}^{2n}:|y+z|\le r\}$ egy végtelen sáv, így az η szigorúan pozitív függvény integrálja végtelen, ezért a fenti határérték nem létezik.

11. Feladat. Tegyük fel, hogy az $u,v\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciókra $u*v=0$. Következik-e ebből, hogy $u=0$ vagy $v=0$?

Megoldás. A válasz, nem. Tekintsük például a $\partial^\alpha\delta_a$ és T_1 disztribúciókat, ahol T_1 az azonosan 1 lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúció, valamint $|\alpha|\ge 1$ multiindex. Ezek nyilván nem nulla disztribúciók, azonban a konvolúció deriválási szabályának felhasználásával

$$(\partial^\alpha\delta_a)*T_1=\delta_0*(\partial^\alpha T_1)=\delta_0*T_{\partial^\alpha 1}=\delta_a*T_0=\delta_a*0=0.$$

Megjegyezzük, hogy a kérdésre függvények esetében is nemleges a válasz, lásd a 8. Feladatban szereplő példát: az (1) függvénynek és a konstans 1 függvénynek a konvolúciója az azonosan 0 függvény.