A 2. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, továbbá $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Hogyan hatnak a $\delta_a \times \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, $\delta_a \times T_g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ és $T_f \times \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre?

Megoldás. A direkt szorzat definíciója alapján tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre

$$(\delta_a \times \delta_b)(\varphi) = \delta_a\{x \mapsto \delta_b[y \mapsto \varphi(x,y)]\} = \delta_a\{x \mapsto \varphi(x,b)\} = \varphi(a,b),$$

tehát $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Másrészt pedig

$$(\delta_a \times T_g)(\varphi) = \delta_a\{x \mapsto T_g[y \mapsto \varphi(x,y)]\} = \delta_a\left\{x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\varphi(x,y)\,dy\right\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\varphi(a,y)\,dy.$$

Hasonlóan könnyen látható, hogy $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(T_f \times \delta_b)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x,b)\,dx.$$

2. Feladat. Legyenek $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciók, továbbá $\alpha \in \mathbb{N}^n$ és $\beta \in \mathbb{N}^m$ multiindexek. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\partial^{(\alpha,\beta)}(u \times v) = (\partial^\alpha u) \times (\partial^\beta v).$$

Megoldás. A direkt szorzat definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ esetén

$$\begin{aligned}\left(\partial^{(\alpha,\beta)}(u \times v)\right)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha+\beta|}(u \times v)(\partial^{(\alpha,\beta)}\varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}u\{x \mapsto v[y \mapsto \partial^{(\alpha,\beta)}\varphi(x,y)]\} = \\ &= (-1)^{|\alpha|}u\{x \mapsto (\partial^\beta v)[y \mapsto \partial^{(\alpha,0)}\varphi(x,y)]\} = \\ &= (\partial^\alpha u)\{x \mapsto (\partial^\beta v)[y \mapsto \varphi(x,y)]\}.\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk azt a nem triviális tényt (lásd előadás), hogy $x \mapsto (\partial^\beta v)[y \mapsto \varphi(x,y)] \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ és

$$\partial^\alpha\left(x \mapsto (\partial^\beta v)[y \mapsto \varphi(x,y)]\right) = (-1)^{|\alpha|}(x \mapsto (\partial^\beta v)[y \mapsto \partial^{(\alpha,0)}\varphi(x,y)]).$$

3. Feladat. Adjunk meg olyan $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúciókat, amelyekre

a) $u \times v = T_{\chi_{[0,1]^2}}$, ahol $\chi_{[0,1]^2}$ az egységnégyzet karakterisztikus függvénye;

b) $(u \times v)(\varphi) = \partial_{12}\varphi(1,1)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén;

c) $(u \times v)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2\varphi(x,1)\,dx$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén.

Megoldás.
a) Legyen $u = v = T_{\chi_{[0,1]}}$. Ekkor $u \times v = T_{\chi_{[0,1]^2}}$, hiszen reguláris disztribúciók direkt szorzata a hozzájuk tartozó lokálisan integrálható függvények direkt szorzatával (pontosabban az ahhoz tartozó reguláris disztribúcióval) egyezik meg.
b) Legyen $u = v = \delta_1'$, ekkor az 1. és 2. Feladatok alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$(u \times u)(\varphi) = (\delta_1' \times \delta_1')(\varphi) = (\partial_{12}(\delta_1 \times \delta_1))(\varphi) = (\partial_{12}\delta_{(1,1)})(\varphi) = (-1)^2\partial_{12}\varphi(1,1) = \partial_{12}\varphi(1,1).$$

c) Legyen $u = T_1$ és $v = -\delta_1'$, ekkor az 1. és 2. Feladatok alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$(u \times v)(\varphi) = -(T_1 \times \delta_1')(\varphi) = -(\partial_2(T_1 \times \delta_1))(\varphi) = (T_1 \times \delta_1)(\partial_2\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2\varphi(x,1)\,dx.$$

4. Feladat. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v.$$

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}^{n+m} \setminus (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v) \subset \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$, amiből következik, hogy $\operatorname{supp}(u \times v) \subset \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Tegyük fel, hogy $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v)$. Ekkor feltehető, hogy $x_0 \notin \operatorname{supp} u$, így x_0-nak van olyan $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt környezete, amelyen $u = 0$. Tekintsük az $U_{x_0} \times \mathbb{R}^m$ halmazt, amely nyilván nyílt környezete (x_0, y_0)-nak, továbbá minden $\varphi \in \mathscr{D}(U_{x_0} \times \mathbb{R}^m)$ függvényre az $x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y)]$ hozzárendeléssel definiált függvény végtelen sokszor differenciálható (ez nem triviális, lásd az előadást) és a tartója része U_{x_0}-nak, ezért $u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y)]\} = 0$. Ebből következően $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$.

A másik irányú tartalmazáshoz legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$. Tegyük fel indirekt, hogy $(x_0, y_0) \in \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Ekkor x_0-nak minden U nyílt környezetéhez található olyan $\varphi_U \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_U \subset U$ és $u(\varphi_U) \neq 0$. Hasonlóan, y-nak minden V környezetéhez van olyan $\varphi_V \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_V \subset V$ és $v(\varphi_V) \neq 0$. Mivel $\operatorname{supp}(u \times v) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ zárt, ezért az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$ feltétel miatt választhatunk olyan U_{x_0} és V_{y_0} környezeteket, amelyre $(U_{x_0} \times V_{y_0}) \cap \operatorname{supp}(u \times v) = \emptyset$. Ekkor a $\varphi(x, y) = \varphi_{U_{x_0}}(x)\varphi_{V_{y_0}}(y)$ függvényre $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset (U_{x_0} \times V_{y_0})$, tehát $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(u \times v) = \emptyset$, így $(u \times v)(\varphi) = 0$, azonban a direkt szorzat definíciója alapján

$$(u \times v)(\varphi) = u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi_{U_{x_0}}(x)\varphi_{V_{y_0}}(y)]\} = u(x \mapsto \varphi_{U_{x_0}}(x)v(\varphi_{V_{y_0}})) = u(\varphi_{U_{x_0}})v(\varphi_{V_{y_0}}) \neq 0,$$

ami ellentmondás. Következésképpen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$, tehát beláttuk a $\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v \subset \operatorname{supp}(u \times v)$ tartalmazást is.

Gondoljuk meg, hogy a fenti állítás függvényekre is triviálisan igaz.

5. Feladat. Adjunk meg olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót, amelyre $\operatorname{supp} u = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ és

a) u előáll $u_1 \times u_2$ alakban, ahol $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

b) u nem áll elő $u_1 \times u_2$ alakban, ahol $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Megoldás.

a) Az 1. Feladat megoldása alapján

$$u = \delta_{(0,0)} + \delta_{(0,1)} + \delta_{(1,0)} + \delta_{(1,1)} = (\delta_0 + \delta_1) \times (\delta_0 + \delta_1), \delta_{(1,1)},$$

és könnyen látható, hogy $\operatorname{supp} u$ a kívánt ponthalmaz, ezért u megfelel a kívánalmaknak.

b) Megmutatjuk, hogy (például)

$$u = 2\delta_{(0,0)} + \delta_{(0,1)} + \delta_{(1,0)} + \delta_{(1,1)}$$

nem áll elő direkt szorzat alakban. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy $u = u_1 \times u_2$, ahol $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Legyen $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)$
$varphi_2(y)$, ahol $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, ekkor a direkt szorzat definíciója alapján

$$u(\varphi) = (u_1 \times u_2)(\varphi) = u_1\{x \mapsto u_2[y \mapsto \varphi_1(x)\varphi_2(y)]\} = u_1\{x \mapsto \varphi_1(x)u_2(\varphi_2)\} = u_1(\varphi_1)u_2(\varphi_2)$$

. Ha most $\varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan függvény, amelyre $\varphi_2 = 1$ a 0 egy környezetében és $\varphi_2 = 0$ az 1 környezetében, akkor tetszőleges $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvény esetén

$$u_1(\varphi_1)u_2(\varphi_2) = u(\varphi_1\varphi_2) = 2\varphi_1(0) + \varphi_1(1),$$

tehát $u_1 = \text{const} \cdot (2\delta_0 + \delta_1)$. Ha viszont $\varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan függvény, amelyre $\varphi_2 = 0$ a 0 egy környezetében és $\varphi_2 = 1$ az 1 környezetében, akkor minden $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ alapfüggvény esetén

$$u_1(\varphi_1)u_2(\varphi_2) = u(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1(0) + \varphi_1(1),$$

tehát $u_1 = \text{const} \cdot (\delta_0 + \delta_1)$, ami ellentmond az $u_1 = \text{const} \cdot (2\delta_0 + \delta_1)$ alaknak (elég ismét olyan alapfüggvényeket választanunk, amelyek a 0 és az 1 pontok egyikének valamely környezetében eltűnik, de a másik pontban nem).

6. Feladat. Igaz-e, hogy ha az $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók előállnak mint egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli és egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$-beli disztribúció direkt szorzata, akkor az $u + v$ disztribúció is előáll direkt szorzat alakban?

Megoldás. A válasz: nem. A 4. Feladat alapján $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$, tehát a direkt szorzatként előálló disztribúciók tartója is előáll direkt szorzat alakban. Ebből következően az 1. Feladat szerint direkt szorzat alakban előálló $\delta_{(0,0)} = \delta_0 \times \delta_0, \delta_{(1,1)} = \delta_1 \times \delta_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ disztribúciók összege, $\delta_{(0,0)} + \delta_{(1,1)}$, nem áll elő direkt szorzat alakban, mert a tartója a $\{(0, 0), (1, 1)\}$ két pontból álló halmaz, amely nem direkt szorzat $\mathbb{R}^2$-ben.

7. Feladat. Tegyük fel, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciókra $u \times v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?

Megoldás. A válasz: igen. A 4. Feladat alapján $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Ebből következően, ha $u \times v = 0$, akkor $\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v = \emptyset$, vagyis $\operatorname{supp} u = \emptyset$ vagy $\operatorname{supp} v = \emptyset$, tehát $u = 0$ vagy $v = 0$.