

2. feladatsor  
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Legyen  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , továbbá  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  és  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ . Hogyan hatnak a  $\delta_a \times \delta_b \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ ,  $\delta_a \times T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  és  $T_f \times \delta_b \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  disztribúciók egy  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  függvényre?

2. Legyenek  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  és  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  disztribúciók, továbbá  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  és  $\beta \in \mathbb{N}^m$  multiindexek. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\partial^{(\alpha,\beta)}(u \times v) = (\partial^\alpha u) \times (\partial^\beta v).$$

3. Adjunk meg olyan  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  disztribúciókat, amelyekre

a)  $u \times v = T_{\chi_{[0,1]^2}}$ , ahol  $\chi_{[0,1]^2}$  az egységnégyzet karakterisztikus függvénye;

b)  $(u \times v)(\varphi) = \partial_{12}\varphi(1, 1)$  minden  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  esetén;

c)  $(u \times v)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2\varphi(x, 1) dx$  minden  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  esetén.

4. Legyen  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  és  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ . Igazoljuk, hogy

$$\text{supp}(u \times v) = \text{supp } u \times \text{supp } v.$$

5. Adjunk meg olyan  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  disztribúciót, amelyre  $\text{supp } u = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  és

a)  $u$  előáll  $u_1 \times u_2$  alakban, ahol  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

b)  $u$  nem áll elő  $u_1 \times u_2$  alakban, ahol  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

6. Igaz-e, hogy ha az  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  disztribúciók előállnak mint egy  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ -beli és egy  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ -beli disztribúció direkt szorzata, akkor az  $u + v$  disztribúció is előáll direkt szorzat alakban?

7. Tegyük fel, hogy az  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  disztribúciókra  $u \times v = 0$ . Következik-e ebből, hogy  $u = 0$  vagy  $v = 0$ ?