Az 1. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. *Megjegyzés.* Több feladat megoldása során is használni fogunk egy fontos függvénycsaládot. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ és tekintsük az alábbi hozzárendeléssel értelmezett $\eta_{a,r} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$\eta_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp(-1/(r^2 - |x-a|^2)), & \text{ha } |x-a| < r, \\ 0, & \text{ha } |x-a| \geq r. \end{cases} \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy $\eta_{a,r} = h \circ g$, ahol $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amelyre

$$h(t) := \begin{cases} \exp(-1/t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, \end{cases}$$

továbbá $g(x) = r^2 - |x-a|^2$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Világos, hogy $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, és az is könnyen látható (egyváltozós analízis segítségével), hogy $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, tehát a kompozíciójukra $\eta_{a,r} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (valójában h klasszikus példa olyan egyváltozós függvényre, amely akárhányszor differenciálható, a 0 pontban minden deriváltja 0, így h Taylor-sora konvergens, de nem a fügvényt állítja elő). Ezenkívül nyilvánvaló, hogy $\operatorname{supp} \eta_r = \overline{B(a,r)}$, így $\eta_{a,r} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Végül még jegyezzük meg azt is, hogy $0 \leq \eta_{a,r} \leq 1$. Összefoglalva:

$$\eta_{a,r} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} \eta_{a,r} = \overline{B_r(a)} \quad 0 \leq \eta_{a,r} \leq 1.$$

Jelölje $a = 0$, $r = \varepsilon > 0$ esetén η_ε az (1) formulával értelmezett függvényt, amelyről feltehető, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1$, különben megfelelő konstans szorzóval normálhatjuk az integrált (amely nem lehet 0, hiszen $\eta_\varepsilon > 0$ a $B(0,\varepsilon)$ gömbön). Így kapjuk az η_ε függvényeket, amelyekre

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} \eta_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}, \quad \eta_\varepsilon \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1.$$

A fenti tulajdonságú függvényekről azt mondjuk, hogy *egységapproximációt generálnak* (más szóval *approximatív egységek*). Fontos szerepük van $L^p(\Omega)$-beli függvények sima függvényekkel való közelítésében, illetve hasznos eszközként kerülnek elő a disztribúciókkal kapcsolatban. Az approximatív egység elnevezés arra utal, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén az η_ε függvények a „Dirac-delta függvényhez tartanak" (a 0-ban végtelenné válik az értékük, máshol 0-vá, az integráljuk pedig 1), amely a disztribúciók körében a konvolúció műveletére nézve éppen az egységelem. A függvények körében a konvolúció műveletére nézve nincs egységelem (lásd a 3. feladatsor 5. Feladatát), az approximatív egységek ezért is fontosak.

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy az angol nyelvű szakirodalomban az egységapproximáció neve *mollifier.* A mollify ige jelentése csillapít, enyhít, amely logikus elnevezés, ugyanis belátható, hogy egységapproximációval konvolválva integrálható függvényt, a kapott függvények simák, és az adott függvényt közelítik.

Meglepő módon azonban nem emiatt kapták az angol nyelvű irodalomban a mollifier nevet. Az egységapproximációt Kurt Otto Friedrichs (1901–1982) német születésű, később Amerikába kivándorolt matematikus vezette be egy 1944-es cikkében. Peter D. Lax (1926–) magyar származású Amerikában élő matematikus szerint ez a cikk a parciális differenciálegyenletek elméletének egyik kiemelkedő jelentőségű munkája. A mollifier szó eredete Lax szerint a következő. Friedrichs kollégája volt Donald Alexander Flanders (1927–) amerikai matematikus, akivel szívesen beszélgetett az angol nyelvről, és meg is kérdezte tőle, hogyan nevezze el ezeket a függvényeket. Flanderst kollégái Mollnak becézték Daniel Defoe regényének hőse, Moll Flanders után. Flanders azt javasolta, hogy „róla" nevezze el a függvényeket. Friedrichsnek tetszett az ötlet, és így lett mollifier a függvények neve. Egyébként nem Friedrichs volt az első, aki ilyen típusú függvényeket használt, már 1938-ban Szergej Szoboljev a később róla elnevezett Szoboljev-térbeli beágyazási tételekről szóló cikkében előfordult az egységapproximáció.

1. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá $a \in \Omega$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$ és $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

Megoldás. Legyen $x \in \Omega$, amelyre $x \neq a$. Ekkor létezik $U_x \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz úgy, hogy $a \notin U_x$, és így $\delta_a(\varphi) = 0$ minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$. Az is világos, hogy a-nak minden U nyílt környezetéhez létezik olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ és $\varphi(a) \neq 0$. Valóban, elég kis $r > 0$ számra $B(a,r) \subset U$, és ekkor az 1. Megjegyzésben értelmezett (1) függvény megfelel. Mindezek alapján szükségképpen $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

A feladat másik feléhez belátjuk, hogy $\Omega \setminus \operatorname{supp} f = \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$. Röviden megfogalmazva, $\Omega \setminus \operatorname{supp} f$ és $\Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$ rendre azok a legbővebb nyílt halmazok Ω-ban, amelyen $f = 0$ m. m., illetve $T_f = 0$, azonban $T_f = 0$ pontosan akkor, ha $f = 0$ m. m., hiszen T_f és f kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást.

Kissé hosszabban megfogalmazva. Tegyük fel, hogy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} f$. Ekkor létezik x-nek U_x környezete, amelyen $f = 0$ m. m., ezért $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$ esetén $T_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi = \int_{U_x} f\varphi = 0$, tehát $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$.

Az előbbi érvelés visszafelé is igaz, $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$ esetén $T_f = 0$ m. m. az x egy U_x környezetén (azaz minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alapfüggvényre, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$). Mivel egy reguláris disztribúció m. m. egyértelműen meghatározza, hogy mely $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvényhez tartozik, ezért szükségképpen $f = 0$ m. m. az U_x halmazon, vagyis $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} f$. Végeredményben tehát $\Omega \setminus \operatorname{supp} f = \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$, amiből következik, hogy $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

2. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tegyük fel, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció tartója nemüres megszámlálható halmaz. Igazoljuk, hogy u nem lehet reguláris! Adjunk meg $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúciót, amelynek a tartója nemüres megszámlálhatóan végtelen halmaz.

Megoldás. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, amelyre $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ nemüres megszámlálható halmaz. Indirekt tegyük fel, hogy $u = T_f$ valamilyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvényre. Ekkor az 1. Feladat alapján $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} u$, tehát f tartója is nemüres megszámlálható. Mivel a tartóján kívül $f = 0$ m. m., ezért $f = 0$ m.m. egy megszámlálható halmaz kivételével, ami azt jelenti, hogy $f = 0$ m.m. $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor viszont $u = T_f = T_0 = 0$, és így $\operatorname{supp} u = \emptyset$, ami ellentmondás.

Példaképpen tekintsük a $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j$ disztribúciót, amelynek tartója (az 1. Feladat mintájára) könnyen láthatóan $\mathbb{N}$. Az, hogy az iménti példa valóban $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-beli, következik a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-n értelmezett lineáris funkcionálok folytonosságának ekvivalens átfogalmazásából. Valóban, $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ esetén létezik $n_K \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $n_K + 1 \notin K$. Ekkor viszont

$$\left| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \right) (\varphi) \right| = \left| \sum_{j=0}^{n_K} \varphi(j) \right| \le \sum_{j=0}^{n_K} |\varphi(j)| \le n_K \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|,$$

ami éppen a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-n értelmezett lineáris funkcionálok folytonosságának ekvivalens átfogalmazása (és az is látszik, hogy valójában minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén $u(\varphi)$ véges összeg).

3. Feladat. Legyen $H = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \subset \mathbb{R}$. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre

a) $\operatorname{supp} u = H$;

b) $H \subset \operatorname{supp} u \subset \mathbb{Q}$?

Ha igen, adjunk meg egyet, ha nincs, bizonyítsuk be! Mi a helyzet $u \in \mathscr{D}'(0, 2)$ esetén?

Megoldás.

a) A válasz: nincs. Egy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció tartója ugyanis az Ω tartományban relatív zárt halmaz (azaz $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ nyílt $\mathbb{R}^n$-ben), így $\Omega = \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{supp} u$ zárt halmaz, azonban $\mathbb{Q}$ nem zárt. Bár a kívánt tulajdonságú disztribúció nem létezik $\mathbb{R}$-en, azonban (például) a $(0, 2)$ intervallumon már van ilyen, többek között $u = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{\frac{1}{j}}$ ilyen tulajdonságú. Az, hogy ez valóban $\mathscr{D}'(0, 2)$-beli, hasonlóan bizonyítható, mint az 1. Feladatban szereplő példa, u valójában egy véges összeg minden $\varphi \in \mathscr{D}(0, 2)$ esetén.

b) A válasz: van. Legyen például

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \delta_{\frac{1}{j}}.$$

Világos, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, ugyanis $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$|u(\varphi)| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} |\delta_{\frac{1}{j}}(\varphi)| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|.$$

Másrészt pedig $\operatorname{supp} u = H \cup \{0\}$, hiszen $\mathbb{R} \setminus (H \cup \{0\})$ nyílt intervallumok uniója, amelyen mindegyik $\delta_{\frac{1}{j}}$ disztribúció nulla, viszont a $H \cup \{0\}$ pontok egyikének sincs olyan környezete, amelyen $u = 0$ volna (válasszunk ugyanis az $\frac{1}{j}$ pontokra, illetve a 0-ra koncentrált „harangfüggvényt”, lásd az 1. Megjegyzést). Érdemes megjegyezni, hogy most $u(\varphi)$ nem feltétlenül véges összeg, hiszen $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{supp}\varphi)$ esetén minden elég nagy j-re $\delta_{\frac{1}{j}}(\varphi) \ne 0$. Ebből kifolyólag az is látszik, hogy szükséges az $1/2^j$-vel való súlyozás, mert $u = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{\frac{1}{j}}$ nem disztribúció $\mathbb{R}$-en. Könnyen látható, hogy általában $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_j}$ pontosan akkor disztribúció egy $\Omega \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazon, ha az (a_j) sorozat nem torlódik Ω-ban.

4. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció, továbbá $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ függvény, amely $\operatorname{supp} u$ egy környezetében 1-gyel egyenlő. Igazoljuk, hogy ekkor $\psi u = u$, azaz minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre $u(\psi\varphi) = u(\varphi)$.

Megoldás. Az u disztribúció linearitásából következően minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre

$$u(\psi\varphi) - u(\chi) = u(\chi(1-\varphi)) = 0,$$

mert a ψ-re vonatkozó feltétel alapján $\operatorname{supp}\varphi(1-\psi) \subset \operatorname{supp}(1-\psi) \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$, hiszen $1-\psi = 0$ a $\operatorname{supp} u$ halmaz egy környezetében, tehát $\operatorname{supp}(1-\psi)$ a $\operatorname{supp} u$ halmaz komplementerében van.

Megjegyezzük, hogy a feladatban szereplő állítás segítségével kompakt tartójú disztribúciók $C^\infty(\Omega)$-ra való kiterjesztését értelmezhetjük. Nevezetesen, ha u kompakt tartójú, akkor tetszőleges, a feladat feltételeinek megfelelő rögzített $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvény esetén az $\tilde{u}\colon C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi\psi)$ funkcionál jól definiált, u-nak kiterjesztése, továbbá $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$ esetén $\tilde{u}(\varphi) = 0$. Nem nehéz igazolni, hogy ez a kiterjesztés egyértelmű, tehát a ψ függvény választásától független. Végül megemlítjük, hogy a feladat kívánalmainak megfelelő ψ függvényt például $\operatorname{supp} u$ karakterisztikus függvényének az egységapproximációval vett konvolúciójával állíthatunk elő.

5. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$, és tegyük fel, hogy $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} u$ halmazon. Következik-e ebből, hogy $\psi u = u$?

Megoldás. A válasz: nem. Legyen ugyanis $u = \delta_1' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ és $\psi(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\psi u(\varphi) = u(\psi\varphi) = \delta_1'(\psi\varphi) = -\delta_1((\psi\varphi)') = -\varphi'(1) - \varphi(1) = \delta_1'(\varphi) - \delta_1(\varphi),$$

vagyis $\psi\delta_1' = \delta_1' - \delta_1 \neq \delta_1'$.

Megjegyezzük, hogy a „bajt” $\operatorname{supp} u$ határa okozza, hiszen abból, hogy $\psi = 1$ a határ pontjaiban is, még nem következik, hogy a határpontok az $(1-\psi)$ függvény tartóján kívül lennének, míg a 3. Feladat bizonyítása lényegében ezen múlott. Amennyiben $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} u$ halmaz egy környezetében, akkor a határpontok is az $(1-\psi)$ függvény tartóján kívül esnek (hiszen ezen pontoknak van olyan környezete, ahol $1-\psi$ m. m. azonosan 0 függvény), és így $(1-\psi)u = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén.

6. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy

a) $\operatorname{supp}(u+v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v$,

b) $\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u$.

Adjunk meg konkrét u és v disztribúciókat, továbbá ψ függvényt, amelyek esetében szigorú tartalmazás áll fenn. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség teljesül.

Adjunk meg konkrét u és v disztribúciókat, továbbá ψ függvényt, amelyek esetében szigorú tartalmazás áll fenn. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség teljesül.

Megoldás. A bizonyítás megegyezik a függvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyításával, és a példák is ennek megfelelően adódnak.

a) Ha $x \in (\Omega \setminus \operatorname{supp} u) \cap (\Omega \setminus \operatorname{supp} v)$, akkor $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$ és $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} v$. Következésképpen létezik U_x és V_x környezete x-nek, hogy $u = 0$ az U_x halmazon és $v = 0$ a V_x halmazon. De ekkor az $U_x \cap V_x$ halmazon, amely ugyancsak környezete x-nek, $u+v = 0$, tehát $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(u+v)$. Következésképpen a komplementer halmazokra $\operatorname{supp}(u+v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v$ teljesül. Rövidebben fogalmazva, ha egy nyílt halmazon u és v egyszerre nulla, akkor ott $u+v$ is nulla, vagyis $(\Omega \setminus \operatorname{supp} u) \cap (\Omega \setminus \operatorname{supp} v) \subset \Omega \setminus \operatorname{supp}(u+v)$.

A szigorú tartalmazáshoz elég két folytonos függvényt találnunk, amelyekre szigorú tartalmazás áll fenn, és akkor az 1. Feladat alapján készen vagyunk. Legyen például $f = 1$ és $g = -1$ az Ω halmazon, ekkor $\operatorname{supp} T_{f+g} = \emptyset$ és $\operatorname{supp} T_f \cup \operatorname{supp} T_g = \Omega$. Amennyiben pedig $u = v$, akkor nyilván $\operatorname{supp}(u+v) = \operatorname{supp}(2u) = \operatorname{supp} u = \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} u$.

b) A másik tartalmazáshoz legyen $x \in \Omega \setminus (\operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u)$, ekkor $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}\psi$ vagy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. Az első esetben létezik x-nek $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete úgy, hogy $U_x \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$. Ebből következően $\psi\varphi = 0$, minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$, így $u(\psi\varphi) = \psi u(\varphi) = 0$, ami azt jelenti, hogy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\psi u)$. Amennyiben $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$, akkor x-nek van olyan $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete, amelyen $u = 0$. Ez azt jelenti, hogy $u(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$. Nyilván minden ilyen tulajdonságú φ-re $\operatorname{supp}(\psi\varphi) \subset \operatorname{supp}\varphi \subset U_x$, tehát $u(\psi\varphi) = \psi u(\varphi) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\psi u = 0$ az U_x környezetben, vagyis $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. Összefoglalva, ha $x \in \Omega \setminus (\operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u)$, akkor $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\psi u)$, ezért a komplementer halmazokra $\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u$ teljesül.

Szigorú tartalmazáshoz legyen $\psi = 0$, és $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tetszőleges nem 0 disztribúció. Ekkor $\psi u = 0$, így $\operatorname{supp}(\psi u) = \emptyset$, amely szigorú részhalmaza $\operatorname{supp} u$-nak.

Egy másik példában legyenek $\psi, f \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvények, amelyekre $\operatorname{supp}\psi = [-1, 0]$ és $\operatorname{supp} f = [0, 1]$ (ilyen függvények az 1. Megjegyzés alapján léteznek). Ekkor az 1. Feladat alapján az $u = T_f$ disztribúcióra $\operatorname{supp} u = [0, 1]$, ezért $\operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u = \{0\}$. Másrészt viszont $\psi u = T_{\psi f}$, így $\operatorname{supp}(\psi u) = \operatorname{supp}(\psi f) = \emptyset$, hiszen ψf a m. m. nulla függvény.