A 11. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Feladat. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = 0,\ u'(a) = 0\}, \quad Lu := -u''$$

Megoldás. Keressük azokat a $\lambda \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekhez létezik $u \in D(L), u \neq 0$ úgy, hogy $Lu = -\lambda u$, azaz $-u'' = \lambda u$. Ehhez hozzávéve az operátor értelmezési tartományában szereplő kezdeti feltételt, az alábbi egydimenziós peremérték-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0,a)) \\ u(0) = 0 \\ u'(a) = 0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet megoldása λ előjelétől függően

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x, & \text{ha } \lambda > 0, \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(Valójában a fenti függvények között, a látszat ellenére, szoros kapcsolat van: mindegyik az $\alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ függvényből származik, ahol α, β komplex számok. Ha $\lambda < 0$, akkor visszakapjuk az exponenciális függvények lineáris kombinációját, amely valójában szinusz-hiperbolikusz és koszinusz-hiperbolikusz függvények lineáris kombinációja. A $\lambda > 0$ esetben a kitevőben tisztán képzetes szám áll, így ekkor a szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációját nyerjük. A $\lambda = 0$ eset $\lambda \to 0$ határátmenettel kapható. Ekkor nyerjük a konstans függvényeket, valamint az $\frac{1}{\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x})$ hányadosból (amely ugyancsak megoldás) $\lambda \to 0$ esetén adódó $\text{const} \cdot x$ függvényeket.) Vegyük most szemügyre a peremfeltételeket! A $\lambda = 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, így $u'(a) = 0$ folytán $c_1 a = 0$, azaz $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$, amelyet nem tekintünk sajátfüggvénynek. A $\lambda < 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_1 + c_2 = 0$, $u'(a) = 0$ folytán pedig $c_1\sqrt{|\lambda|}(e^{\sqrt{|\lambda|}a} + e^{-\sqrt{|\lambda|}a}) = 0$, ezért szükségképpen $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. Marad a $\lambda > 0$ eset. Ekkor $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, másrészt $u'(a) = 0$ folytán $\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a = 0$, következésképpen $\sqrt{\lambda} a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ahol k nemnegatív egész szám (hiszen a $\lambda > 0$ esetet vizsgáljuk). Ez azt jelenti, hogy $\lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^2$, ekkor $u(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} x$, ahol k a nemnegatív egész számok halmazát futja be. A sajátérték-feladatok elméletéből tudjuk, hogy a sajátfüggvények rendszere teljes ortogonális $L^2(0,a)$-ban. Normáljuk a sajátfüggvényeket $L^2(0,a)$-ban, ekkor nyerjük a sajátfüggvények alábbi teljes ortonormált rendszerét:

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^2, \qquad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} x \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Megjegyezzük, hogy a normálásnál felhasználtuk, hogy $\int_0^a \sin^2 \frac{k\pi}{a} x \, dx = \frac{a}{2}$, amit például a következőképpen igazolhatunk. A kétszeres szög koszinuszára vonatkozó $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ összefüggés alapján $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ adódik, amelynek felhasználásával

$$\int_0^a \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2a} x \, dx = \int_0^a \frac{1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{a} x}{2} \, dx = \frac{a}{2} - \frac{a}{2(2k+1)\pi} \left[\sin \frac{(2k+1)\pi}{a} x\right]_{x=0}^a = \frac{a}{2}.$$

2. Feladat. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit! Mutassuk meg, hogy az operátornak van negatív sajátértéke is!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u'(0) = u(0),\ u'(a) = u(a)\}, \quad Lu := -u''$$

Megoldás. Keressük azokat a $\lambda \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekhez létezik $u \in D(L), u \neq 0$ úgy, hogy $Lu = -\lambda u$, azaz $-u'' = \lambda u$. Ehhez hozzávéve az operátor értelmezési tartományában szereplő kezdeti feltételt, az alábbi egydimenziós peremérték-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0,a)) \\ u'(0) = u(0) \\ u'(a) = u(a). \end{cases}$$

A differenciálegyenlet megoldása λ előjelétől függően

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x, & \text{ha } \lambda > 0, \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases}$$

Vegyük most szemügyre a peremfeltételeket! A $\lambda = 0$ esetben $u'(0) = u(0)$ miatt $c_1 = c_2$, így $u'(a) = u(a)$ folytán $c_1 a + c_1 = c_1$, azaz $c_1 a = 0$, ezért $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$, amelyet nem tekintünk sajátfüggvénynek. A $\lambda < 0$ esetben $u'(0) = u(0)$ miatt $\sqrt{|\lambda|}(c_1 - c_2) = c_1 + c_2$, azaz

$$c_1(\sqrt{|\lambda|} - 1) = c_2(\sqrt{|\lambda|} + 1). \tag{2}$$

Az $u'(a) = u(a)$ peremfeltételből pedig $\sqrt{|\lambda|}(c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} - c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}a}) = c_1(e^{\sqrt{|\lambda|}a} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}a})$ adódik, más szóval

$$c_1 e^{2\sqrt{|\lambda|}a}(\sqrt{|\lambda|} - 1) = c_2(\sqrt{|\lambda|} + 1). \tag{3}$$

Összevetve a (2) és (3) egyenleteket

$$c_1 e^{2\sqrt{|\lambda|}a}(\sqrt{|\lambda|} - 1) = c_1(\sqrt{|\lambda|} - 1)$$

adódik. Ebből $c_1 = 0$ vagy $\lambda = -1$ következik. A $c_1 = 0$ esetben a (2) összefüggésből $c_2 = 0$ adódna, vagyis $u = 0$, amely nem sajátfüggvény. Marad tehát a $\lambda = -1$ eset, ekkor $u(x) = ce^x$ sajátfüggvény.

Tekintsük végül a $\lambda > 0$ eset. Ekkor $u'(0) = u(0)$ miatt $c_2 = \sqrt{\lambda} c_1$, és így $u'(a) = u(a)$ folytán

$$c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a - \lambda c_1 \sin\sqrt{\lambda}a = c_1 \sin\sqrt{\lambda}a + c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a,$$

vagyis $2c_1(\lambda+1)\sin\sqrt{\lambda}a = 0$. Ebből következően $c_1 = 0$ vagy $\sqrt{\lambda}a = k\pi$. A $c_1 = 0$ esetben $c_2 = 0$, és így $u = 0$, amely nem sajátfüggvény. Marad tehát a $\sqrt{\lambda}a = k\pi$ eset, vagyis $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, ahol k pozitív egész szám. Ebben az esetben tehát a sajátértékek, és a hozzá tartozó sajátfüggvények rendszere a következő:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \qquad u_k(x) = c\sin\frac{k\pi}{a}x + c\frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi}{a}x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ehhez hozzávéve a $\lambda_0 = -1$ sajátértéket és az $u_0(x) = c \cdot e^x$ sajátfüggvényt, megkapjuk az operátor összes sajátértékét és sajátfüggvényét. (Könnyen ellenőrizhető, hogy a sajátfüggvények ortogonális rendszert alkotnak.)

Megjegyezzük, hogy a negatív sajátérték létezése nem mond ellent a sajátértékek elméletének, hiszen az $u'(a) = u(a)$ feltétel nem szokványos harmadik típusú peremfeltétel. A harmadfajú peremfeltétel „helyes” alakja $u'(a) = \alpha u(a)$, ahol $\alpha < 0$.

3. Feladat. Legyen $a_i > 0$ $(i = 1, 2)$, továbbá

$$D_i := \{u \in C^2(0, a_i) \cap C^1([0, a_i]) : u(0) = u(a_i) = 0\} \quad (i = 1, 2).$$

Adjunk meg olyan L másodrendű differenciáloperátort és a_1, a_2 számokat, hogy $D(L) = D_1$ esetén L-nek nincs negatív sajátértéke, azonban $D(L) = D_2$ esetén van.

Megoldás. Legyen $Lu := -u'' - \frac{u}{2}$. Ekkor L sajátértékei az $u \mapsto -u''$ operátor sajátérékeinek $-\frac{1}{2}$-del való eltoltjai, hiszen az $Lu = \lambda u$ sajátérték-egyenlet ekvivalens az $u \mapsto -u'' = (\lambda + \frac{1}{2})u$ sajátérték-egyenlettel. Már csak két intervallumot kell keresnünk, amelyek egyikén a $-u''$ operátor minden sajátértéke $\frac{1}{2}$-nél nagyobb, a másikon viszont van $\frac{1}{2}$-nél kisebb sajátértéke, hiszen ekkor az első esetben az eltolt sajátértékek mind pozitívak maradnak, a második esetben viszont az eltolt sajátértékek között lesz negatív. Jól ismert, hogy az $u \mapsto -u''$ operátor sajátértékei a $(0, a)$ intervallumon homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett a $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ számok, ahol k pozitív egész szám. Ekkor $a_1 = \pi$ esetén L sajátértékei a D_1 értelmezési tartományon a $k^2 - \frac{1}{2}$ számok, amelyek mind pozitívak. Az $a_2 = 2\pi$ esetben viszont L sajátértékei a D_2 értelmezési tartományon a $\frac{k^2}{4} - \frac{1}{2}$ alakú számok, amelyek között $k = 1$ esetén a $-\frac{1}{2}$ negatív sajátérték adódik. Megjegyezzük, hogy a sajátértékek elméletéből tudjuk, hogy az $u \mapsto -u'' + du$ operátor sajátértékei (a szokásos peremfeltételek esetén) nemnegatívak, feltéve, hogy $d \geq 0$.

4. Feladat. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatokat!

a) $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+), \\ u(t,\pi) = \pi t & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

c) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \sin 2x \cos 2x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin 3x - 4\sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

d) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t\cos x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u'(t,0) = u'(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

Megoldás. a) Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a $(t,x) \mapsto tx$ függvény kielégíti a peremfeltételeket, ezért célszerű az u megoldást $u(t,x) = v(t,x) + tx$ alakban keresni. Ekkor v-re nézve a következő vegyes feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) - \partial_x^2 v(t,x) = -x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ v(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

Keressük a v megoldást $v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) u_k(x)$, ahol u_k a homogén Dirichlet-peremfeltétellel adott egydimenziós (mínusz) Laplace-operátor $L^2(0,\pi)$-ben normált sajátfüggvénye $(k = 1, \dots)$, azaz:

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \quad (k = 1, 2 \dots). \tag{4}$$

Ehhez írjuk fel az egyenlet jobb oldalán és a peremfeltételekben szereplő függvényeket ugyanebben a bázisban. A konstans 0 függvényt könnyen felírhatjuk, hiszen a sorfejtésben minden együttható 0. Ezenkívül világos, hogy

$$-x = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} x \sin kx \ \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx,$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{k} \left[-x \cos kx \right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos ky \, dy = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{k}.$$

Ekkor ξ_k-ra a következő kezdetiérték-feladat adódik $\mathbb{R}^+$-ban:

$$\xi_k'(t) + k^2 \xi_k(t) = \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k}$$
$$\xi_k(0) = 0.$$

A ξ-ra vonatkozó differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása az $x \mapsto \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k^3}$ konstansfüggvény, így célszerű ξ_k-t $\xi_k(t) = \eta_k(t) + \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k^3}$ alakban keresni. Ekkor η_k-ra a következő kezdetiérték-feladatot nyerjük:

$$\eta_k'(t) + k^2 \eta_k(t) = 0$$
$$\xi_k(0) \ = \ -\frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k^3}.$$

Szorozzuk a differenciálegyenlet mindkét oldalát $e^{k^2 t}$-vel, ekkor $\eta_k'(t) e^{k^2 t} + k^2 e^{k^2 t} \eta_k(t) = 0$, azaz $\left(\eta_k(t) e^{k^2 t} \right)' = 0$, vagyis $\eta_k(t) = \eta_k(0) e^{-k^2 t} = -\frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k^3} e^{-k^2 t}$. Ennek alapján a parabolikus vegyes feladat megoldása:

$$u(t,x) = tx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k^3} (1 - e^{-k^2 t}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} (1 - e^{-k^2 t}) \sin kx.$$

Jegyezzük meg, hogy a fenti sor konvergenciája minden $t > 0$ esetén $L^2(0,\pi)$-ben értendő, azonban a Weierstrass-kritérium alapján könnyen látható, hogy minden $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le T$ esetén egyenletesen is konvergál a sor, sőt a megfelelő deriváltjai is, és ezáltal a feladat klasszikus megoldását nyertük.

b) A Fourier-módszert alkalmazzuk, keressük az u megoldást $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) u_k(x)$, ahol u_k a homogén Dirichlet-peremfeltétellel adott egydimenziós (mínusz) Laplace-operátor $L^2(0,\pi)$-ben normált sajátfüggvénye $(k = 1, \dots)$, lásd a (4) rendszert. Ehhez írjuk fel az egyenlet jobb oldalán és a peremfeltételben szereplő függvényeket ugyanebben a bázisban. A konstans 0 függvényt könnyen felírhatjuk, hiszen a sorfejtésben minden együttható 0. Ezenkívül világos, hogy

$$x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} x \sin kx \ \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{2\pi}}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx,$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{k} \left[-x \cos kx\right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos ky \, dy = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{k}.$$

Ekkor ξ_k-ra a következő kezdetiérték-feladat adódik $\mathbb{R}^+$-ban:

$$\xi_k'(t) + k^2 \xi_k(t) = 0$$

$$\xi_k(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{k} (-1)^{k+1}.$$

Szorozzuk a differenciálegyenlet mindkét oldalát $e^{k^2 t}$-vel, ekkor $\xi_k'(t) e^{k^2 t} + k^2 e^{k^2 t} = 0$, azaz $\left(\xi_k(t) e^{k^2 t}\right)' = 0$, vagyis $\xi_k(t) = \xi_k(0) e^{-k^2 t} = \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{2\pi}}{k} e^{-k^2 t}$. Ennek alapján a parabolikus vegyes feladat megoldása:

$$u(t,x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Jegyezzük meg, hogy a fenti sor konvergenciája minden $t > 0$ esetén $L^2(0,\pi)$-ben értendő, azonban könnyen látható, hogy minden $x \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le T$ esetén egyenletesen is konvergál a sor, sőt a megfelelő deriváltjai is, és ezáltal a feladat klasszikus megoldását nyertük.

c) A Fourier-módszert alkalmazzuk. Először is vegyük észre, hogy $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$. Bontsuk szét a feladatot két részproblémára:

$$\begin{cases} \partial_t v_1(t,x) - \partial_x^2 v_1(t,x) = \frac{1}{2} \sin 4x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ v_1(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ v_1(t,0) = v_1(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+) \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \partial_t v_2(t,x) - \partial_x^2 v_2(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ v_2(0,x) = \sin 3x - 4 \sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ v_2(t,0) = v_2(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

Tekintsük az első problémát! Írjuk fel a $\sin 4x$ függvényt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot \sin kx$ alakban! Világos, hogy $c_k = 1$, ha $k = 4$ különben pedig $c_k = 0$. Ekkor az u_1 megoldást $v_1(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin kx$ alakban keresve, az egyenlet és a mellékfeltétel felhasználásával kapjuk, hogy $\xi_k = 0$, ha $k \ne 4$, továbbá ξ_4-re a $\xi_4'(t) + 16\xi_4(t) = \frac{1}{2}$ közönséges differenciálegyenlet és a $\xi_4(0) = 0$ kezdeti feltétel adódik. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^{16t}-vel szorozva $e^{16t}\xi_4'(t) + 16e^{16t}\xi_4(t) = \frac{1}{2}$, azaz $(e^{16t}\xi_4(t))' = \frac{1}{2}e^{16t}$, így $\xi_4(t) = e^{-16t}\xi(0)_4 + \frac{1}{32}(1 - e^{-16t}) = \frac{1}{32}(1 - e^{-16t})$. Az első részfeladat megoldása tehát $v_1(t,x) = \frac{1}{32}(1 - e^{-16t}) \sin 4x$.

Tekintsük most a második részproblémát! Mivel a kezdeti függvény a homogén Dirichlet-peremfeltétellel adott (mínusz) Laplace-operátor sajátfüggvénye, ezért keressük a megoldást $v_2(t,x) = d_1(t) \sin 3x + kd2(t) \sin 5x$ alakban. Ekkor az egyenletbe helyettesítve és a kezdeti feltételt figyelembe véve (az előző rész gondolatmenetére támaszkodva) d_1-re és d_2-re a következő egydimenziós kezdetiérték-feladat adódik: $d_1'(t) = -9d_1(t), d_1(0) = 1$ és $d_2'(t) = -25d_2, d_2(0) = -4$. Ezek megoldásai $d_1(t) = e^{-9t}$ és $d_2(t) = -4e^{-25t}$, így a második részfeladat megoldása $v_2(t,x) = e^{-9t} \sin 3x - 4e^{-25t} \sin 5x$.

A vegyes feladat megoldása a linearitás miatt a két részfeladat megoldásának összege, vagyis $u(t,x) = \frac{1}{32}(1 - e^{-16t}) \sin 2x + e^{-9t} \sin 3x - 4e^{-25t} \sin 5x$. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű.

d) Az előzőek mintájára a Fourier-módszert alkalmazzuk, keressük most az u megoldást $u(t,x) = d(t) \cos x$ alakban, hiszen Neumann-típusú peremfeltétel adott, amelynek $\cos x$ sajátfüggvénye a $(0,\pi)$ intervallumon. Ekkor a kezdeti feltételből $d(0) = 0$ adódik, továbbá u-t az egyenletbe helyettesítve a $d'(t) + d(t) = t$ közönséges differenciálegyenletet kapjuk. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^t-vel szorozva $e^t d'(t) + e^t d(t) = te^t$ adódik, így $(e^t d(t))' = te^t$, tehát (mivel $(te^t - e^t)' = te^t$, ezért) $d(t) = t - 1 + ce^{-t}$, így a kezdeti feltétel alapján $d(t) = t - 1 + e^{-t}$. A parabolikus vegyes feladat megoldása tehát $u(t,x) = (e^t + t - 1) \cos x$. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű (lásd előadás).

Érdemes megemlíteni, hogy Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikus és fizikus volt, aki 1822-ben A hővezetés analitikus elmélete címmel kiadott munkájában a később róla elnevezett Fourier-sorok (tehát trigonometrikus sorok) elméletét alapozta meg. Ezirányú kutatásai mellett a francia Isère megye prefektusaként tevékenykedett, és ezalatt készítette el egyiptológiai témájú áttekintő monográfiáját is. Témavezetője Lagrange volt. Doktori tanítványai közé tartozott többek között Dirichlet. Az üvegházhatás felfedezése is Fourier nevéhez köthető.

5. Feladat. Oldjuk meg az alábbi hiperbolikus vegyes feladatokat!

$$\text{a)}\ \begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 2e^{-t}\sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin x & (x \in [0,\pi]), \\ \partial_t u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t\sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin x & (x \in [0,\pi]), \\ \partial_t u(0,x) = \sin x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = (t^2+2)\sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 2\sin x & (x \in [0,\pi]), \\ \partial_t u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

Megoldás. a) A Fourier-módszert alkalmazzuk. Keressük a megoldást $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\cdot k^2 \sin kx$ alakban! Ezt az egyenletbe helyettesítve $k \neq 1$ esetén a $c_k''(t) + c_k(t) = 0$, $c_k(0) = 0$, $c_k'(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot nyerjük. Ennek a konstans 0 függvény megoldása, és az egyértelmű megoldhatóság miatt más megoldása nincs. Ha $k = 1$, akkor a c_1 együtthatóra a $c_1''(t) + c_1(t) = 2e^{-t}$, $c_1(0) = 1$, $c_1'(0) = 0$ kezdetiérték-feladat adódik. Vegyük észre, hogy a $t \mapsto e^{-t}$ függvény kielégíti a $c_1''(t) + c_1(t) = 2e^{-t}$ egyenletet, ezért célszerű c_1-et $c_1(t) = e^{-t} + d(t)$ alakban keresni. A d függvényre ekkor a $d''(t) + d(t) = 0$, $d(0) = 0$, $d'(0) = 1$ kezdetiérték-feladat adódik. A $d''(t) + d(t) = 0$ egyenlet általános megoldásai a $d_1 \sin t + d_2 \cos t$ alakú függvények, a kezdeti feltételek alapján ebből $d(t) = \sin t$ adódik. Végeredményben tehát $u(t,x) = (e^{-t} + \sin t)\sin x$.

b) A Fourier-módszert alkalmazzuk. Keressük a megoldást $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\cdot k^2 \sin kx$ alakban! Ezt az egyenletbe helyettesítve $k \neq 1$ esetén a $c_k''(t) + c_k(t) = 0$, $c_k(0) = 0$, $c_k'(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot nyerjük. Ennek a konstans 0 függvény megoldása, és az egyértelmű megoldhatóság miatt más megoldása nincs. Ha $k = 1$, akkor a c_1 együtthatóra a $c_1''(t) + c_1(t) = t$, $c_1(0) = 1$, $c_1'(0) = 1$ kezdetiérték-feladat adódik. Vegyük észre, hogy a $t \mapsto t$ függvény kielégíti a $c_1''(t) + c_1(t) = t$ egyenletet, ezért célszerű c_1-et $c_1(t) = t + d(t)$ alakban keresni. A d függvényre ekkor a $d''(t) + d(t) = 0$, $d(0) = 1$, $d'(0) = 0$ kezdetiérték-feladat adódik. A $d''(t) + d(t) = 0$ egyenlet általános megoldásai a $d_1 \sin t + d_2 \cos t$ alakú függvények, a kezdeti feltételek alapján ebből $d(t) = \cos t$ adódik. Végeredményben tehát $u(t,x) = (t + \cos t)\sin x$.

c) A Fourier-módszert alkalmazzuk. Keressük a megoldást $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\cdot k^2 \sin kx$ alakban! Ezt az egyenletbe helyettesítve $k \neq 1$ esetén a $c_k''(t) + c_k(t) = 0$, $c_k(0) = 0$, $c_k'(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot nyerjük. Ennek a konstans 0 függvény megoldása, és az egyértelmű megoldhatóság miatt más megoldása nincs. Ha $k = 1$, akkor a c_1 együtthatóra a $c_1''(t) + c_1(t) = t^2 + 2$, $c_1(0) = 2$, $c_1'(0) = 0$ kezdetiérték-feladat adódik. Vegyük észre, hogy a $t \mapsto t^2$ függvény kielégíti a $c_1''(t) + c_1(t) = t^2 + 2$ egyenletet, ezért célszerű c_1-et $c_1(t) = t^2 + d(t)$ alakban keresni. A d függvényre ekkor a $d''(t) + d(t) = 0$, $d(0) = 2$, $d'(0) = 0$ kezdetiérték-feladat adódik. A $d''(t) + d(t) = 0$ egyenlet általános megoldásai a $d_1 \sin t + d_2 \cos t$ alakú függvények, a kezdeti feltételek alapján ebből $d(t) = 2\cos t$ adódik. Végeredményben tehát $u(t,x) = (t^2 + 2\cos t)\sin x$.

6. Feladat. Tegyük fel, hogy (f_j) teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_1)$-ben, (g_j) teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_2)$-ben, ahol $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$. Tekintsük az $f_i \times g_j \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $(f_i \times g_j)(x,y) := f_i(x)g_j(y)$ függvényeket $(i,j = 1,2,\dots)$. Igazoljuk, hogy $(f_i \times g_j)$ teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$-ben.

Megoldás. Nyilvánvalóan

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} ((f_{i_1} \times g_{j_1})(f_{i_2} \times g_{j_2}))^2 = \int_{\Omega_1} (f_{i_1} f_{i_2})^2 \int_{\Omega_2} (g_{j_1} g_{j_2})^2,$$

tehát $(i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)$ esetén az $f_{i_1} \times g_{j_1}$ és $f_{i_2} \times g_{j_2}$ függvények ortogonálisak, másrészt pedig $\|f_i \times g_j\|^2_{L^2(\Omega_1\times\Omega_2)} = 1$. Ebből következően az $(f_i \times g_j)$ rendszert ortonormált. Tegyük fel, hogy valamilyen $h \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ függvény az $(f_i \times g_j)$ rendszer minden elemére ortogonális. Értelmezzük ekkor az

$$F_i(y) := \int_{\Omega_1} h(x,y) f_i(x)\, dx \qquad (y \in \Omega_1)$$

függvényeket. A Fubini-tételből következően $F_i \in L^2(\Omega_1)$, így $F_i g_j$ integrálható Ω_2-n, továbbá

$$\int_{\Omega_2} F_i g_j = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} h(f_i \times g_j) = 0,$$

ezért a (g_j) rendszer teljessége miatt $F_i(y) = 0$ m.m. Ω_2-n. Ekkor azonban F_i definíciója alapján minden i-re és m.m. $y \in \Omega_2$-re

$$\int_{\Omega_1} h(x,y) f_i(x)\, dx = 0,$$

de az (f_i) rendszer teljessége miatt ez csak úgy lehetséges, ha $h(x,y) = 0$ m.m. $x \in \Omega_2$ esetén. Végeredményben tehát $f = 0$ m.m. az $\Omega_1 \times \Omega_2$ halmazon, vagyis az $(f_i \times g_j)$ teljes.