Az 10. feladatsor megoldása
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

A feladatok megoldása során gyakran támaszkodunk a Riesz-Fréchet-tételre, ezért az alábbiakban emlékeztetünk erre az alapvető eredményre.

1. Tétel (Riesz-Fréchet (1907))**.** *Legyen $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál a H Hilbert-téren. Ekkor egyértelműen létezik $y \in H$, hogy $\varphi(x) = (x, y)$ minden $x \in H$ esetén. Sőt, $\|x\| = \|\varphi\|$, következésképpen $\Phi\colon H \to H^*$, $\Phi(y) = (\cdot, y)$ izometrikus izomorfizmus.*

Ezenkívül az alábbi egyenlőtlenség is (amelyet sokszor, nem teljesen helyesen, Poincaré-egyenlőtlenség néven emlegetnek) többször előkerül.

2. Tétel (Poincaré-egyenlőtlenség korlátos Ω-n)**.** *Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Ekkor létezik $c(\Omega) > 0$ konstans úgy, hogy minden $u \in H_0^1(\Omega)$ esetén*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

1. Feladat. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Értelmezzük az alábbi klasszikus elliptikus peremérték-feladatok általánosított alakját $H^1(a, b)$-ben ($f \in L^2(a, b)$ mellett), majd fogalmazzunk meg az általánosított, illetve klasszikus megoldás létezésével, valamint regularitásával kapcsolatos állításokat!

a)
$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, & \\ u(b) = 0. & \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-n}, \\ u'(a) = u(a), & \\ u(b) = 0. & \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = u(b), & \\ u'(a) = u'(b). & \end{cases}$$

Megoldás.
a) Legyen
$$V := H_0^1(a, b) = \{u \in H^1(a, b) : u(a) = u(b) = 0)\}.$$
(Vegyük észre, hogy $C_0^\infty(a, b) \subset V$.) Tegyük fel, hogy $u \in C^2([a, b])$ megoldása a peremérték-feladatnak, ekkor a parciális integrálás (más néven Green-tétel) $H^1(a, b)$-beli függvényekre való érvényessége miatt (amely a $C_0^\infty(a, b) \subset V$ sűrű tartalmazás felhasználásával határátmenet után adódik) minden $v \in V$ esetén

$$\int_a^b fv = \int_a^b (-u'' + u)v = -[u'v]_a^b + \int_a^b u'v' + \int_a^b uv = \int_a^b (u'v' + uv),$$

vagyis

$$\int_a^b (u'v' + uv) = \int_a^b fv. \tag{1}$$

Adott $f \in L^2(a, b)$ esetén keressünk $u \in V$ függvényt, amelyre minden $v \in V$ esetén teljesül az (1) összefüggés, ezt nevezzük a feladatban szereplő peremérték-probléma általánosított alakjának, u-t pedig általánosított megoldásnak (vegyük észre, hogy az $u(a) = u(b) = 0$ peremfeltételek a V tér definíciójába kerültek). A fenti érvelésből következően, ha $u \in C^2([a, b])$ klasszikus megoldás, akkor általánosított értelemben is megoldás. Tegyük fel, hogy $u \in C^2([a, b]) \cap V$ általánosított megoldás, ekkor egyrészt $u(a) = u(b) = 0$ klasszikus értelemben, másrészt a fenti gondolatmenetet visszafelé alkalmazva kapjuk, hogy minden $v \in V$ esetén

$$\int_a^b (-u'' + u)v = \int_a^b fv.$$

Mivel $C_0^\infty(a,b) \subset V$, ezért szükségképpen $-u'' + u = f$. Azt kaptuk, hogy ha $u \in C^2([a,b]) \cap V$ általánosított megoldás, akkor klasszikus értelemben is megoldás.

Megmutatjuk, hogy minden $f \in L^2(a,b)$ esetén az (1) feladatnak egyértelműen létezik $u \in V$ megoldása (sőt, ez igaz minden $f \in H^{-1}(a,b)$ esetén is, ahol $H^{-1}(a,b)$ a $H_0^1(a,b)$ tér duálisa). Valóban, a V térben bevezetve a szokásos $H^1(a,b)$-beli

$$(u,v)_V := \int_a^b (u'v' + uv)$$

skalárszorzatot, az (1) feladat a következő absztrakt alakba írható:

$$(u,v)_V = (f,v)_{L^2(a,b)} \quad \text{minden } v \in V \text{ függvényre.} \tag{2}$$

(Jegyezzük meg, hogy a nyom operátor folytonossága miatt V zárt altér $H^1(a,b)$-ben, tehát maga is Hilbert-tér a fenti skalárszorzattal, ez később a Riesz-tétel alkalmazhatóságához szükséges. Egydimenzióban nem szükséges a nyom operátor folytonosságáról beszélni, elég hivatkozni a 4. feladatsor 1. Feladatára, ahonnan következik, hogy $u \mapsto (u(a), u(b)$ korlátos $H^1(\Omega) \to L^\infty(a,b) \times L^\infty(a,b)$ lineáris operátor.) A Hölder-egyenlőtlenség alapján világos, hogy

$$|(f,v)_{L^2(a,b)}| \le \int_a^b |fv| \le \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \le \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_V, \tag{3}$$

vagyis $F(v) = (f,v)_{L^2(a,b)}$ folytonos lineáris funkcionál a V téren. Ekkor a Riesz-tételből következően egyértelműen létezik $u_F \in V$, amelyre $F(v) = (u_F, v)_V$ minden $v \in V$ esetén, így a (2) absztrakt egyenletnek $u = u_F$ egyértelmű megoldása. Jegyezzük meg, hogy a megoldás folytonosan függ f-től, hiszen a Riesz-tétel miatt $\|F\| = \|u_F\|_V$, és így (3) alapján

$$\|u_F\|_V \le \|f\|_{L^2(a,b)}. \tag{4}$$

Most belátjuk, hogy $f \in L^2(a,b)$ esetén valójában $u \in H^2(a,b)$. Valóban, az (1) összefüggésből következően minden $v \in C_0^\infty(a,b)$ függvényre

$$\int_a^b u'v' = -\int_a^b (u-f)v,$$

vagyis az $u' \in L^2(a,b)$ függvény általánosított deriváltja éppen $(u-f) \in L^2(\Omega)$, tehát $u' \in H^1(a,b)$, így $u \in H^2(a,b)$, ráadásul a (4) felhasználásával

$$\|u\|_{H^2(a,b)} \le \text{const} \cdot (\|u\|_{H_0^1(a,b)} + \|u''\|_{L^2(a,b)}) \le \text{const} \cdot (\|u\|_{L^2(a,b)} + \|f\|_{L^2(a,b)}).$$

Gondoljuk meg, hogy ha $f \in H^m(a,b)$, akkor hasonló érveléssel (indukcióval) az általánosított megoldásra $u \in H^{m+2}(a,b)$, és

$$\|u\|_{H^{m+2}(a,b)} \le \text{const} \cdot (\|u\|_{H^{m+1}(a,b)} + \|u\|_{H^m(a,b)} + \|f\|_{H^m(a,b)}) \le \text{const} \cdot (\|u\|_{L^2(a,b)} + \|f\|_{H^m(a,b)})$$

következik. Speciálisan, ha $f \in C^\infty([a,b])$, akkor $u \in C^\infty([a,b])$, hiszen $C^\infty([a,b]) = \bigcap_{m=1}^\infty H^m(a,b)$).

Végül, amennyiben $f \in C([a,b])$, akkor $u \in H^2(a,b)$, tehát a 4. feladatsor 5. Feladata szerint m.m. létező u'' klasszikus deriváltra $u'' = u - f \in C([a,b])$ (hiszen $H^2(a,b) \subset C([a,b])$ az idézett feladat alapján), vagyis $u \in C^2([a,b])$, tehát klasszikus megoldás.

Érdemes a fentieket egy tételben megfogalmaznunk.

3. Tétel. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum, és tekintsük a következő klasszikus elliptikus peremérték-feladatot:*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

Ekkor minden $f \in L^2(a,b)$ esetén a feladatnak egyértelműen létezik $u \in H_0^1(a,b)$ általánosított megoldása, amely folytonosan függ f-től az alábbi értelemben:

$$\|u\|_{H_0^1(a,b)} \le \|f\|_{L^2(a,b)}.$$

Ha $f \in H^m(a,b)$, akkor az általánosított megoldásra $u \in H^{m+2}(a,b)$, speciálisan $f \in C^\infty([a,b])$ esetén $u \in C^\infty([a,b])$. Amennyiben pedig $f \in C([a,b])$, akkor $u \in C^2([a,b])$, tehát klasszikus értelemben is megoldás.

Megjegyzés. A 3. Tételben $f \in H^{-1}(a,b)$ is írható (ahol $H^{-1}(a,b)$ a $H_0^1(a,b)$ tér duálisa), ekkor a bizonyításban az $(f,v)_{L^2(a,b)}$ funkcionál helyett helyett $f(v)$ írandó.

b) Legyen

$$V := H_0^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) : u(b) = 0)\}.$$

(Vegyük észre, hogy $C_0^\infty(a,b) \subset V$.) Tegyük fel, hogy $u \in C^2([a,b])$ megoldása a peremérték-feladatnak, ekkor a parciális integrálás (más néven Green-tétel) $H^1(a,b)$-beli függvényekre való érvényessége miatt (amely a $C_0^\infty(a,b) \subset V$ sűrű tartalmazás felhasználásával határátmenet után adódik) minden $v \in V$ esetén

$$\int_a^b fv = \int_a^b (-u'' + u)v = -[u'v]_a^b + \int_a^b u'v' + \int_a^b uv = \int_a^b (u'v' + uv) + u'(a)v(a),$$

vagyis az $u'(a) = u(a)$ peremfeltétel figyelembe vételével

$$\int_a^b (u'v' + uv) + u(a)v(a) = \int_a^b fv. \tag{5}$$

Adott $f \in L^2(a,b)$ esetén keressünk $u \in V$ függvényt, amelyre minden $v \in V$ esetén teljesül az (5) összefüggés, ezt nevezzük a feladatban szereplő peremérték-probléma általánosított alakjának, u-t pedig általánosított megoldásnak (vegyük észre, hogy az $u(b) = 0$ peremfeltétel a V tér definíciójába került). A fenti érvelésből következően, ha $u \in C^2([a,b])$ klasszikus megoldás, akkor általánosított értelemben is megoldás. Tegyük fel, hogy $u \in C^2([a,b]) \cap V$ általánosított megoldás, ekkor egyrészt $u(b) = 0$ klasszikus értelemben, másrészt a fenti gondolatmenetet visszafelé alkalmazva kapjuk, hogy minden $v \in V$ esetén

$$\int_a^b (-u'' + u)v + (u'(a) - u(a))v(a) = \int_a^b fv.$$

Először $v \in C_0^\infty(a,b)$ függvényeket választva $v(a) = 0$, így

$$\int_a^b (-u'' + u)v = \int_a^b fv,$$

ezért szükségképpen $-u'' + u = f$, ennek következményeképpen pedig $(u'(a) - u(a))v(a) = 0$, tehát $u'(a) = u(a)$. Azt kaptuk, hogy ha $u \in C^2([a,b]) \cap V$ általánosított megoldás, akkor klasszikus értelemben is megoldás.

Megmutatjuk, hogy minden $f \in L^2(a,b)$ esetén az (5) feladatnak egyértelműen létezik $u \in V$ megoldása (sőt, ez igaz minden $f \in H^{-1}(a,b)$ esetén). Valóban, a V térben bevezetve az

$$(u,v)_V := \int_a^b (u'v' + uv) + u(a)v(a)$$

skalárszorzatot, az (5) feladat a következő absztrakt alakba írható:

$$(u,v)_V = (f,v)_{L^2(a,b)} \quad \text{minden } v \in V \text{ függvényre.} \tag{6}$$

Vegyük észre, hogy a fenti skalárszorzat ekvivalens a $H^1(a,b)$ térbeli szokásos skalárszorzattal. Valóban, felhasználva a 4. feladatsor 1. Feladatának eredményét (nevezetesen $\|u\|_{L^\infty(a,b)} \le \text{const} \cdot \|u\|_{H^1(a,b)}$),

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \int_a^b ((u')^2 + u^2) \le \int_a^b ((u')^2 + u^2) + u(a)^2 \le ((u')^2 + u^2) + \text{const} \cdot \|u\|_{H^1(a,b)}^2 \le \text{const} \cdot \|u\|_{H^1(a,b)}^2.$$

A nyom operátor folytonossága miatt V zárt altér $H^1(a,b)$-ben, tehát maga is Hilbert-tér a fenti ekvivalens skalárszorzattal (ez később a Riesz-tétel alkalmazhatóságához szükséges). A Hölder-egyenlőtlenség alapján világos, hogy

$$|(f,v)_{L^2(a,b)}| \le \int_a^b |fv| \le \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \le \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_V, \tag{7}$$

vagyis $F(v) = (f,v)_{L^2(a,b)}$ folytonos lineáris funkcionál a V téren. Ekkor a Riesz-tételből következően egyértelműen létezik $u_F \in V$, amelyre $F(v) = (u_F, v)_V$ minden $v \in V$ esetén, így a (6) absztrakt egyenletnek $u = u_F$ egyértelmű megoldása. Jegyezzük meg, hogy a megoldás folytonosan függ f-től, hiszen a Riesz-tétel miatt $\|F\| = \|u_F\|_V$, és így (7) alapján

$$\|u_F\|_V \le \|f\|_{L^2(a,b)}. \tag{8}$$

Most belátjuk, hogy $f \in L^2(a,b)$ esetén valójában $u \in H^2(a,b)$. Valóban, az (5) összefüggésből következően minden $v \in C_0^\infty(a,b)$ függvényre

$$\int_a^b u'v' = -\int_a^b (u - f)v,$$

vagyis az $u' \in L^2(a,b)$ függvény általánosított deriváltja éppen $(u-f) \in L^2(\Omega)$, tehát $u' \in H^1(a,b)$, így $u \in H^2(a,b)$, ráadásul a (8) becslés felhasználásával

$$\|u\|_{H^2(a,b)} \le \mathrm{const} \cdot (\|u\|_{H^1(a,b)} + \|u''\|_{L^2(a,b)}) \le \mathrm{const} \cdot (\|u\|_{L^2(a,b)} + \|f\|_{L^2(a,b)}).$$

Gondoljuk meg, hogy ha $f \in H^m(a,b)$, akkor hasonló érveléssel (indukcióval) az általánosított megoldásra $u \in H^{m+2}(a,b)$, és

$$\|u\|_{H^{m+2}(a,b)} \le \mathrm{const} \cdot (\|u\|_{H^{m+1}(a,b)} + \|u\|_{H^m(a,b)} + \|f\|_{H^m(a,b)}) \le \mathrm{const} \cdot (\|u\|_{L^2(a,b)} + \|f\|_{H^m(a,b)})$$

következik. Speciálisan, ha $f \in C^\infty([a,b])$, akkor $u \in C^\infty([a,b])$, hiszen $C^\infty([a,b]) = \bigcap_{m=1}^\infty H^m(a,b)$.

Végül, amennyiben $f \in C([a,b])$, akkor $u \in H^2(a,b)$, tehát a 4. feladatsor 5. Feladata szerint m.m. létező u'' klasszikus deriváltra $u'' = u - f \in C([a,b])$ (hiszen $H^2(a,b) \subset C([a,b])$ az idézett feladat alapján), vagyis $u \in C^2([a,b])$, tehát klasszikus megoldás.

c) Legyen

$$V := \{u \in H^1(a,b) : u(a) = u(b)\}.$$

(Vegyük észre, hogy $C_0^\infty(a,b) \subset V$.) Tegyük fel, hogy $u \in C^2([a,b])$ megoldása a peremérték-feladatnak, ekkor a parciális integrálás (más néven Green-tétel) $H^1(a,b)$-beli függvényekre való érvényessége miatt (amely a $C_0^\infty(a,b) \subset V$ sűrű tartalmazás felhasználásával határátmenet után adódik) minden $v \in V$ esetén

$$\int_a^b fv = \int_a^b (-u'' + u)v = -[u'v]_a^b + \int_a^b u'v' + \int_a^b uv = \int_a^b (u'v' + uv),$$

vagyis

$$\int_a^b (u'v' + uv) = \int_a^b fv. \tag{9}$$

Adott $f \in L^2(a,b)$ esetén keressünk $u \in V$ függvényt, amelyre minden $v \in V$ esetén teljesül (a 9) összefüggés, ezt nevezzük a feladatban szereplő peremérték-probléma általánosított alakjának, u-t pedig általánosított megoldásnak. A fenti gondolatmenetből következően, ha $u \in C^2([a,b])$ klasszikus megoldás, akkor általánosított értelemben is megoldás. Tegyük fel, hogy $u \in C^2([a,b]) \cap V$ általánosított megoldás, ekkor egyrészt $u(a) = u(b)$ klasszikus értelemben, másrészt a fenti érvelést visszafelé alkalmazva kapjuk, hogy minden $v \in V$ esetén

$$\int_a^b (-u'' + u)v + (u'(a) - u'(b))v(a) = \int_a^b fv.$$

Először $v \in C_0^\infty(a,b)$ függvényeket választva

$$\int_a^b (-u'' + u)v = \int_a^b fv,$$

így $-u'' + u = f$. Ebből következően $(u'(a) - u'(b))v(a) = 0$ minden $v \in V$ esetén, vagyis szükségképpen $u'(a) = u'(b)$. Azt kaptuk, hogy ha $u \in C^2([a,b]) \cap V$ általánosított megoldás, akkor klasszikus értelemben is megoldás.

Tekintsük most az általánosított feladatot! Az a) rész bizonyításához hasonlóan a (9) feladatot a következő absztrakt alakba írhatjuk:

$$(u,v)_V = (f,v)_{L^2(a,b)} \quad \text{minden } v \in V \text{ függvényre,} \tag{10}$$

ahol

$$(u,v)_V := \int_a^b (u'v' + uv)$$

a szokásos $H^1(a,b)$-beli skalárszorzat. Jegyezzük meg, hogy a nyom operátor folytonossága miatt V zárt altér $H^1(a,b)$-ben, tehát maga is Hilbert-tér a fenti skalárszorzattal, ez később a Riesz-tétel alkalmazhatóságához szükséges. A (10) összefüggés jobb oldala $f \in L^2(a,b)$ esetén folytonos lineáris funkcionál a V téren, így a Riesz-tételből következően egyértelműen létezik $u_F \in V$, amelyre $(f,v)_{L^2(a,b)} = (u_F, v)_V$, és ekkor $u = u_F$ egyértelmű megoldása az általánosított feladatnak (amely ráadásul folytonosan függ f-től, ahogy ezt az a) rész bizonyításához hasonlóan láthatjuk).

Állítjuk, hogy $f \in L^2(a,b)$ esetén az általánosított megoldásra $u \in H^2(a,b)$, továbbá $f \in C([a,b])$ esetén $u \in C^2([a,b])$. Valóban, a (9) összefüggés azt is jelenti, hogy minden $v \in C_0^\infty(a,b)$ függvényre

$$\int_a^b u'v' = -\int_a^b (u-f)v,$$

és innen ugyanazt a gondolatmenetet követhetjük, mint az a) rész bizonyításában. Ezenkívül, ha $f \in H^m(a,b)$, akkor hasonló érveléssel (indukcióval) az általánosított megoldásra $u \in H^{m+2}(a,b)$, és

$$\|u\|_{H^{m+2}(a,b)} \leq \text{const} \cdot (\|u\|_{H^{m+1}(a,b)} + \|u\|_{H^m(a,b)} + \|f\|_{H^m(a,b)}) \leq \text{const} \cdot (\|u\|_{L^2(a,b)} + \|f\|_{H^m(a,b)})$$

következik. Speciálisan, ha $f \in C^\infty([a,b])$, akkor $u \in C^\infty([a,b])$.

Megjegyzés. A fenti eredmények megfelelő általánosításai magasabb dimenzióban is érvényesek, ezek a megoldás tartományon belüli, illetve határmenti simaságáról szóló tételek. Felhívjuk azonban a figyelmet, hogy a bizonyítások magasabb dimenzióban lényegesen nehezebbek, sokkal több meggondolást és egyéb matematikai eszközöket igényelnek.

2. Feladat. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum, $p \in C^1([a,b])$, $p > 0$, $r, q \in C([a,b])$. Tekintsük a következő klasszikus peremérték-feladatot (Sturm-Liouville-feladat):

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

Az r/p függvény egy primitív függvényének segítségével írjuk át a feladatot szimmetrikus alakra! Értelmezzük ezután a feladat általánosított alakját $H^1(a,b)$-ben ($f \in L^2(a,b)$ mellett), majd fogalmazzunk meg az általánosított, illetve klasszikus megoldás létezésével, valamint regularitásával kapcsolatos állításokat!

Megoldás. Legyen R olyan függvény, amelyre $R' = r/p$ (ilyen van, mert $p \in C^1([a,b])$, $p > 0$ és $r \in C([a,b])$). Ekkor a

$$-(pu')' + ru' + qu = f$$

egyenlet $u \in C^2([a,b])$ esetén ekvivalens a

$$-(pe^{-R}u')' + qe^{-R}u = fe^{-R}$$

egyenlettel. Valóban, egyszerű számolással adódik, hogy

$$-(pe^{-R}u')' + qe^{-R}u = e^{-R}(-(pu')' + ru' + qu).$$

Vezessük be a $\tilde{p} := pe^{-R}$, $\tilde{q} := qe^{-R}$ és $\tilde{f} := fe^{-R}$ függvényeket, ekkor a

$$\begin{cases} -(\tilde{p}u')' + \tilde{q}u = \tilde{f} & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0 \end{cases}$$

peremérték-feladatot nyerjük. Ez a probléma az 1. Feladat a) részében szereplőhöz hasonló. Állítjuk, hogy minden $\tilde{p} \in L^\infty(a,b)$, $\tilde{p} > c > 0$, $\tilde{q} \in L^\infty(a,b)$, $\tilde{q} \geq 0$ és $\tilde{f} \in L^2(a,b)$ esetén egyértelműen létezik $u \in H_0^1(a,b)$ általánosított megoldása. Ezenkívül $\tilde{p} \in C^1([a,b])$, $\tilde{p} > 0$, $\tilde{q} \in C([a,b])$ és $\tilde{f} \in C([a,b])$ esetén az általánosított megoldás $C^2([a,b])$-beli, tehát klasszikus értelemben is megoldás. E feltételek azt jelentik, hogy $p \in C^1([a,b])$, $p > 0$, $r \in C([a,b])$, $q \in C([a,b])$, $q \geq 0$, és $f \in C([a,b])$.

A fentieket a következőképpen igazolhatjuk. Az 1. Feladat a) részéhez hasonlóan $u \in C^2([a,b])$ esetén $v \in V = H_0^1(a,b)$ tesztfüggvénnyel szorozva parciális integrálás után

$$\int_a^b (\tilde{p}u'v' + \tilde{q}uv) = \int_a^b \tilde{f}v \tag{11}$$

adódik. Adott $\tilde{f} \in L^2(a,b)$ esetén keressünk $u \in V$ függvényt, amelyre minden $v \in V$ esetén teljesül a (11) összefüggés, ezt nevezzük a feladatban szereplő peremérték-probléma általánosított alakjának, u-t pedig általánosított megoldásnak (vegyük észre, hogy az $u(a) = u(b) = 0$ peremfeltételek a V tér definíciójába kerültek). A fenti érvelésből következően, ha $u \in C^2([a,b])$ klasszikus megoldás, akkor általánosított értelemben is megoldás. Tegyük fel, hogy $u \in C^2([a,b]) \cap V$ általánosított megoldás, ekkor egyrészt $u(a) = u(b) = 0$ klasszikus értelemben, másrészt a fenti gondolatmenetet visszafelé alkalmazva kapjuk, hogy minden $v \in V$ esetén

$$\int_a^b (-\tilde{p}u'' + \tilde{q}u)v = \int_a^b \tilde{f}v.$$

Mivel $C_0^\infty(a,b) \subset V$, ezért szükségképpen $-\tilde{p}u'' + \tilde{q}u = f$. Azt kaptuk, hogy ha $u \in C^2([a,b]) \cap V$ általánosított megoldás, akkor klasszikus értelemben is megoldás.

Megmutatjuk, hogy minden $\tilde{p} \in L^\infty(a,b)$, $\tilde{p} > c > 0$, $\tilde{q} \in L^\infty(a,b)$, $\tilde{q} \geq 0$, $\tilde{f} \in L^2(a,b)$ esetén a (11) feladatnak egyértelműen létezik $u \in V$ megoldása (sőt, ez igaz minden $\tilde{f} \in H^{-1}(a,b)$ esetén). Valóban, a V térben bevezetve az

$$(u,v)_V := \int_a^b (\tilde{p}u'v' + \tilde{q}uv)$$

skalárszorzatot, az (1) feladat a következő absztrakt alakba írható:

$$(12) \qquad (u,v)_V = (\tilde{f},v)_{L^2(a,b)} \quad \text{minden } v \in V \text{ függvényre.}$$

Vegyük észre, hogy a fenti skalárszorzat ekvivalens a szokásos $H^1(a,b)$-beli skalárszorzattal. Valóban, a Poincaré-egyenlőtlenség, továbbá $\tilde{p} \in L^\infty(a,b)$, $\tilde{p} > c > 0$, $\tilde{q} \in L^\infty(a,b)$, $\tilde{q} \geq 0$ figyelembe vételével

$$C\int_a^b ((u')^2 + u^2) \leq \int_a^b c(u')^2 \leq \int_a^b (\tilde{p}(u')^2 + \tilde{q}u^2) \leq \left(\|\tilde{p}\|_{L^\infty(a,b)} + \|\tilde{q}\|_{L^\infty(a,b)}\right)\int_a^b ((u')^2 + u^2).$$

A nyom operátor folytonossága miatt V zárt altér $H^1(a,b)$-ben, tehát maga is Hilbert-tér a fenti ekvivalens skalárszorzattal. Az 1. Feladat a) részének bizonyításához hasonlóan $F(v) = (\tilde{f},v)_{L^2(a,b)}$ folytonos lineáris funkcionál a V téren. Ekkor a Riesz-tételből következően egyértelműen létezik $u_F \in V$, amelyre $F(v) = (u_F, v)_V$ minden $v \in V$ esetén, így a (12) absztrakt egyenletnek $u = u_F$ egyértelmű megoldása, amely folytonosan függ $\tilde{f}$-tól.

Most belátjuk, hogy $\tilde{f} \in L^2(a,b)$ esetén valójában $u \in H^2(a,b)$. Valóban, a (11) összefüggésből következően minden $v \in C_0^\infty(a,b)$ függvényre

$$\int_a^b u'v' = -\int_a^b \frac{1}{\tilde{p}}(\tilde{f} - \tilde{q}u)v,$$

vagyis az $u' \in L^2(a,b)$ függvény általánosított deriváltja éppen $\frac{1}{\tilde{p}}(\tilde{f} - \tilde{q}u) \in L^2(\Omega)$, tehát $u' \in H^1(a,b)$, így $u \in H^2(a,b)$, ráadásul

$$\|u\|_{H^2(a,b)} \leq \text{const}\frac{1}{\|\tilde{p}\|_{L^\infty}(a,b)} \cdot (\|u\|_{L^2(a,b)} + \|\tilde{q}\|_{L^\infty(a,b)}\|\tilde{f}\|_{L^2(a,b)}).$$

Amennyiben $\tilde{p} \in C^1([a,b])$, $\tilde{p} > 0$, $\tilde{q} \in C([a,b])$ és $\tilde{f} \in C([a,b])$, akkor $u \in H^2(a,b)$, tehát a 4. feladatsor 5. Feladata szerint m.m. létező u'' klasszikus deriváltra $u'' = \frac{1}{\tilde{p}}(\tilde{f} - \tilde{q}u) \in C([a,b])$ (hiszen $H^2(a,b) \subset C([a,b])$ az idézett feladat alapján), vagyis $u \in C^2([a,b])$, tehát klasszikus megoldás. Az említett feltételek azt jelentik, hogy $p \in C^1([a,b])$, $p > 0$, $r \in C([a,b])$, $q \in C([a,b])$, $q \geq 0$, és $f \in C([a,b])$.

3. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelynek pereme folytonosan differenciálható. Tekintsük a következő úgynevezett *biharmonikus egyenletre* vonatkozó peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \Omega\text{-n}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Az $u \in H_0^2(\Omega)$ függvényt általánosított megoldásnak nevezzük, ha minden $v \in H_0^2(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega fv.$$

Igazoljuk, hogy minden $f \in L^2(\Omega)$ esetén a fenti peremérték-feladatnak egyértelműen létezik általánosított megoldása!

Megoldás. Először is tegyük fel, hogy $u \in C^4(\overline{\Omega})$ klasszikus megoldás. Ekkor minden $v \in H_0^2(\Omega)$ függvényre a Green-tétel Szoboljev-terekbeli alakjának, továbbá $u|_{\partial\Omega} = \partial_\nu u = 0$ felhasználásával

$$\int_\Omega (\Delta^2 u)v = \int_\Omega \Delta u \Delta v$$

adódik, amely összefüggés (határátmenet miatt) $u \in H^2(\Omega)$ esetén is érvényes. Ebből következően u általánosított értelemben is megoldás. Az előbbi érvelés visszafelé is érvényes, egy $u \in C^4(\overline{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)$ általánosított megoldás valójában klasszikus értelemben is megoldás.

Az $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényre, illetve a $\partial_j u \in H_0^1(\Omega)$ deriváltakra alkalmazott Poincaré-egyenlőtlenség folytán $H_0^2(\Omega)$-ban az

$$\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} := \sum_{j,k=1}^n (\partial_{jk}u)^2$$

összefüggés a $H^2(\Omega)$ tér normájával ekvivalens normát, az

$$(u,v)_{H_0^2(\Omega)} := \sum_{j,k=1}^{n} (\partial_{jk}u)(\partial_{jk}v)$$

összefüggés pedig a $H_0^2(\Omega)$ térbeli skalárszorzattal ekvivalens skalárszorzatot definiál. Vegyük észre, hogy $u,v \in C^4(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = \partial_\nu u = 0$, $v|_{\partial\Omega} = \partial_\nu v = 0$ esetén a Green-tételből következően

$$\int_\Omega (\partial_{jk}u)(\partial_{jk}v) = -\int_\Omega (\partial_j u)(\partial_{jkk}v) = \int_\Omega (\partial_j^2 u)(\partial_k^2 v),$$

amely határátmenettel tetszőleges $u,v \in H_0^2(\Omega)$ függvényekre adódik, így

$$(u,v)_{H_0^2(\Omega)} = \sum_{j,k=1}^{n} \int_\Omega (\partial_j^2 u)(\partial_k^2 v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v.$$

Következésképpen a biharmonikus egyenletre vonatkozó peremérték-feladat ekvivalens a következő absztrakt egyenlettel:

$$(u,v)_{H_0^2(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{minden } v \in H_0^2(\Omega) \text{ függvényre,}$$

ahol $F(v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}$ folytonos lineáris funkcionál $H_0^2(\Omega)$-n (amely zárt altere a $H^2(\Omega)$ térnek, tehát maga is Hilbert-tér). A Riesz-tételből következően egyértelműen létezik $u_F \in H_0^2(\Omega)$, amelyre $(u_F,v)_{H_0^2(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)}$, tehát egyértelműen létezik $u = u_F$ általánosított megoldása a biharmonikus egyenletre vonatkozó homogén peremfeltételű peremérték-feladatnak (amely ráadásul folytonosan függ f-től).