

10. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Értelmezzük az alábbi klasszikus elliptikus peremérték-feladatok általánosított alakját $H^1(a, b)$ -ben ($f \in L^2(a, b)$ mellett), majd fogalmazzunk meg az általánosított, illetve klasszikus megoldás létezésével, valamint regularitásával kapcsolatos állításokat!

a)

$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a, b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a, b)\text{-n}, \\ u'(a) = u(a), \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a, b)\text{-n}, \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

2. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum, $p \in C^1([a, b])$, $p > 0$, $r, q \in C([a, b])$. Tekintsük a következő klasszikus peremérték-feladatot (Sturm-Liouville-feladat):

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & (a, b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

Az r/p függvény egy primitív függvényének segítségével írjuk át a feladatot szimmetrikus alakra! Értelmezzük ezután a feladat általánosított alakját $H^1(a, b)$ -ben ($f \in L^2(a, b)$ mellett), majd fogalmazzunk meg az általánosított, illetve klasszikus megoldás létezésével, valamint regularitásával kapcsolatos állításokat!

3. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelynek pereme folytonosan differenciálható. Tekintsük a következő úgynevezett *biharmonikus egyenletre* vonatkozó peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \Omega\text{-n}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Az $u \in H_0^2(\Omega)$ függvényt általánosított megoldásnak nevezzük, ha minden $v \in H_0^2(\Omega)$ esetén

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \int_{\Omega} f v.$$

Igazoljuk, hogy minden $f \in L^2(\Omega)$ esetén a fenti peremérték-feladatnak egyértelműen létezik általánosított megoldása!