1. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2018. ősz

1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá $a \in \Omega$ és $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$ és $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

2. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tegyük fel, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció tartója nemüres megszámlálható halmaz. Igazoljuk, hogy u nem lehet reguláris! Adjunk meg $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúciót, amelynek a tartója nemüres megszámlálhatóan végtelen halmaz.

3. Legyen $H = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \subset \mathbb{R}$. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre

   a) $\operatorname{supp} u = H$;
   b) $H \subset \operatorname{supp} u \subset \mathbb{Q}$?

   Ha igen, adjunk meg egyet, ha nincs, bizonyítsuk be! Mi a helyzet $u \in \mathscr{D}'(0, 2)$ esetén?

4. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció, továbbá $\psi \in C^\infty(\Omega)$ függvény, amely $\operatorname{supp} u$ egy környezetében 1-gyel egyenlő. Igazoljuk, hogy ekkor $\psi u = u$, azaz minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre $u(\psi\varphi) = u(\varphi)$.

5. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$, és tegyük fel, hogy $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} u$ halmazon. Következik-e ebből, hogy $\psi u = u$?

6. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy

   a) $\operatorname{supp}(u + v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v$,
   b) $\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u$.

   Adjunk meg konkrét u és v disztribúciókat, továbbá ψ függvényt, amelyek esetében szigorú tartalmazás áll fenn. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség teljesül.