A 7. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2016. tavasz

1. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben}, \\ v(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t v(0,x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ és $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. Tegyük fel, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ esetén a feladat $v(\cdot,\cdot;\tau)$ megoldására $v, \partial_t^2 v, \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$. Értelmezzük ekkor az u függvényt a következőképpen:

$$u(t,x) = \int_0^t v(t-\tau, x; \tau)\, d\tau.$$

Igazoljuk, hogy $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben, $u(0,x) = 0$ és $\partial_t u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, azaz u megoldása a második részfeladatnak! (Duhamel-elv)

Megoldás. Nyilván $u(0,x) = \displaystyle\int_0^0 (\dots) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Továbbá a 6. feladatsor 6. feladatában szereplő deriválási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\partial_t u(t,x) = v(0,x;t) + \int_0^t \partial_t v(t-\tau, x; \tau)\, d\tau.$$

Mivel v megoldása a $(*)$ feladatnak $\tau = t$ paraméter mellett, ezért $v(0,x;t) = 0$, ebből következően $\partial_t u(0,x) = \displaystyle\int_0^0 (\dots) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Másrészt

$$\partial_t^2 u(t,x) = \partial_t v(0,x;t) + \int_0^t \partial_t^2 v(t-\tau, x; \tau)\, d\tau.$$

Tudjuk, hogy $v(\cdot,\cdot;t)$ megoldása a $(*)$ feladatnak $\tau = t$ paraméter mellett, ezért $\partial_t v(0,x;t) = f(t,x)$. Ezenkívül (a megfelelő simasági feltételből adódóan az integrál deriválását elvégezhetjük úgy, hogy az integrandust deriváljuk, azaz)

$$\Delta u(t,x) = \int_0^t \Delta v(t-\tau, x; \tau)\, d\tau.$$

A fenti összefüggéseket összevetve kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_0^t \left(\partial_t v(t-\tau,x;\tau) - \Delta v(t-\tau,x;\tau)\right) d\tau.$$

A fenti egyenlőség jobb oldalán szereplő integrandus nullával egyenlő, hiszen $v(\cdot,\cdot;\tau)$ megoldása a $(*)$ feladatnak, tehát $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$. Ezzel beláttuk, hogy u megoldása a második részfeladatnak.

2. Legyen w a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben}, \\ w(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t w(0,x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $w \in C^3(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n)$, és legyen ekkor $u(t,x) = \partial_t w(t,x)$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n)$. Igazoljuk, hogy $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben, $u(0,x) = g(x)$ és $\partial_t u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, azaz u megoldása a harmadik részfeladatnak!

Megoldás. Nyilván $u(0,x) = \partial_t w(0,x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Továbbá a simasági feltételekből adódóan $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$ esetén

$$\partial_t u(t,x) = \partial_t^2 w(t,x) = \Delta w(t,x),$$

ezért $\partial_t u(0,x) = \Delta w(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Végül $\partial_t^2 u = \partial_t(\partial_t^2 w)$ és $\Delta u = \Delta \partial_t w = \partial_t(\Delta w)$, tehát $\partial_t^2 u - \Delta u = \partial_t(\partial_t^2 w - \Delta w) = 0$. Ezzel megmutattuk, hogy u megoldása a 3. részfeladatnak.

3. Oldjuk meg $n = 1$ esetén az első részfeladatot!

Megoldás. Az 1. feladatsor 1/d feladatából következik, hogy $u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$ valamilyen $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ függvényekre. Az F, G függvények konkrét alakját a mellékfeltételek segítségével határozhatjuk meg. A kezdeti feltételekből adódóan $\partial_t u(t,x) = F'(x+t) - G'(x-t)$, így $h(x) = \partial_t u(0,x) = F'(x) - G'(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Ezenkívül $0 = u(0,x) = F(x) + G(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Az előbbi két összefüggést összevetve $\frac{1}{2}h(x) = F'(x)$, azaz $F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x h(\xi)\,d\xi + c$ és $G(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x h(\xi)\,d\xi - c$. Ennek alapján

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^{x+t} h(\xi)\,d\xi + c - \frac{1}{2}\int_0^{x-t} h(\xi)\,d\xi - c = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\,d\xi.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy $n = 1$ és $g \in C^2(\mathbb{R})$ esetén a harmadik részfeladat megoldása $u(t,x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t))$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

Megoldás. A második és harmadik részfeladatok előbb bizonyított megoldóképletei alapján

$$u(t,x) = \partial_t\left(\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\,d\xi\right) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right).$$

Vegyük észre, hogy most már fel tudjuk írni $n = 1$ esetén a hiperbolikus Cauchy-feladat megoldásának általános formuláját. A 3. feladat szerint az első részfeladat megoldása $u_1 = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\,d\xi$. A 4. feladat alapján a harmadik részfeladat megoldása $u_3(t,x) = \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t))$. Az 1. feladat pedig azt mondja, hogy a második részfeladat megoldása a $(*)$ feladat megoldásából nyerhető integrálással. A $(*)$ feladat megoldása (a 3. feladat alapján) $v(t,x;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(\tau,\xi)\,d\xi$, így az 1. feladat szerint $u_2(t,x) = \int_0^t \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau$. Végeredményben tehát (az egyenlet linearitás miatt) a hiperbolikus Cauchy-feladat megoldása a három részfeladat megoldásának összege, vagyis

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

A fenti képlet az úgynevezett d'Alembert-formula. Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) francia matematikus és fizikus 1747-ben írt fel az egydimenziós hullámegyenletet és vezette le a fenti formulát a megoldásra. D'Alembert törvénytelen gyermekként született, születésekor anyja a Saint Jean le Rond templom lépcsőin hagyta, keresztnevét innen kapta. Megemlítjük, hogy az $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$ operátort szokás d'Alembert-operátornak hívni és a $\Box$ rövid jelölést bevezetni rá.

5. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = t - x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = \sin x & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0,x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Megoldás. A második részfeladathoz tartozó segédfeladat:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ v(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t v(0,x) = \tau - x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ennek megoldása $v(t,x;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (\tau - \xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\left[\tau\xi - \frac{\xi^2}{2}\right]_{\xi=x-t}^{x+t} = \tau t - tx$. Ekkor a második rédszfeladat megoldása

$$u_2(t,x) = \int_0^t (t-\tau)(\tau - x)\,d\tau = \int_0^t (t\tau - tx - \tau^2 + \tau x)\,d\tau = \left[t\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} - tx\tau + \frac{\tau^2}{2}x\right]_{\tau=0}^t = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2 x}{2}.$$

A harmadik és első részfeladatokhoz tartozó segédfeladatok:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ v(0,x) = \sin x & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t v(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 w - \partial_x^2 w = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ w(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t w(0,x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ezek megoldásai rendre $v(t,x) = \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t))$ és $w(t,x) = \int_{x-t}^{x+t} \cos\xi\,d\xi = \frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t))$. Ennek alapján a Cauchy-feladatunk megoldása $u(t,x) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2 x}{2} + \sin(x+t)$.

6. Legyen u a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

ahol g, $h \in C(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha $\operatorname{supp} g, \operatorname{supp} h \subset [a,b]$, akkor $\operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset [a-t, b+t]$ minden $t > 0$ esetén. (Véges sebességű hullámterjedés)

Megoldás. A 3. és 4. feladatok alapján tudjuk, hogy

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi.$$

Világos, hogy $x \notin [a-t, b+t]$ esetén az $[x-t, x+t]$ intervallum az $[a,b]$ intervallumon kívülre esik (esetleg közös az egyik végpontjuk), ezért ha $\operatorname{supp} g \subset [a,b]$, akkor $[x-t, x+t]$ intervallumon mind g, mind pedig h nullával egyenlő. Ekkor a fenti megoldóformula alapján $u(t,x) = 0$, vagyis $\operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset [a-t, b+t]$. A kapott eredmény azt jelenti, hogy az $[a,b]$ intervallumra koncentrált kezdeti zavaró hatás t idő elteltével csak az $[a-t, b+t]$ intervallumon érzékelhető, a hullám véges (jelen esetben 1) sebességgel terjed (ellentétben a hővezetés modelljével).

7. Igazoljuk $n = 1$ esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ h-tól a következő értelemben: ha h_1, $h_2 \in C(\mathbb{R}^n)$, amelyekre $|h_1(x) - h_2(x)| \le \varepsilon$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a Cauchy-feladat megfelelő u_1, u_2 megoldásaira $|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \le \varepsilon t$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

Megoldás. Világos, hogy

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \le \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} |h_1(\xi) - h_2(\xi)|\, d\xi \le \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varepsilon\, d\xi = \varepsilon t.$$

8. Mutassuk meg $n = 1$ esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ f-től a következő értelemben: ha $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, amelyekre $|f_1(t,x) - f_2(t,x)| \le \varepsilon$ $((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, akkor $|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \le \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

Megoldás. A (1) D'Alembert formula alapján könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| &\le \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} |f_1(\tau,\xi) - f_2(\tau,\xi)|\, d\xi\, d\tau \le \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \varepsilon\xi\, d\tau = \\ &= \int_0^t \varepsilon(t-\tau)\, d\tau = \varepsilon\left[-\frac{(t-\tau)^2}{2}\right]_0^t = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned}$$

*9. Legyen $u \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times [0,1])$ az egydimenziós $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ hullámegyenlet egy olyan megoldása, amelyre $u(t,0) = u(t,1) = 0$ minden $t \ge 0$ esetén (mindkét végén rögzített húr). Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((\partial_t u(t,x))^2 + (\partial_x u(t,x))^2\right) dx$$

formulával értelmezett függvény (mechanikai energia) valójában nem függ t-től.

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.