

2. zh (B) feladatsor  
III. éves alkmattal parcdiff 2015. tavasz

1. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = tx^3 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Legyen  $h \in C^1(\mathbb{R})$  monoton növekvő függvény. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0, x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

hiperbolikus Cauchy-feladat  $u$  megoldására minden rögzített  $t > 0$  esetén  $x \mapsto u(t, x)$  is monoton növekvő függvény.

3. Legyen  $[a, b]$  tetszőleges korlátos, zárt intervallum, továbbá  $p \in C^1([a, b])$ , amelyre  $p(x) \geq m > 0$  minden  $x \in [a, b]$  esetén. Definíáljuk az  $L: L^2(a, b) \hookrightarrow L^2(a, b)$  operátort a következőképpen:

$$D(L) := \{u \in C^2(a, b) \cap C^1([a, b]) : u(a) = 0, u'(b) + u(b) = 0, Lu \in L^2(a, b)\}, \quad Lu := -(pu)'$$

Igazoljuk, hogy ekkor az  $L: L^2(a, b) \hookrightarrow L^2(a, b)$  operátor szimmetrikus, azaz  $\langle Lu, v \rangle_{L^2(a, b)} = \langle u, Lv \rangle_{L^2(a, b)}$  minden  $u, v \in D(L)$  esetén, továbbá  $L$  szigorúan pozitív, azaz  $\langle Lu, u \rangle_{L^2(a, b)} > 0$  minden  $u \in D(L), u \neq 0$  esetén.

4. Legyen  $\Omega := B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ , ahol  $B_R(0)$  jelöli az origó középpontú  $R$  sugarú nyílt körlapot a síkon. Milyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén van az alábbi peremérték-feladatnak  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  megoldása? Adjuk meg a megoldásokat!

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \Omega\text{-ban,} \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \alpha. \end{cases}$$

5. Legyen  $T = (0, \pi)^2$  és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} -\Delta u = 3 \cos x \cos 4y - 8 \cos 2x \cos 5y & T\text{-ben,} \\ \partial_\nu u|_{\partial T} = 0. \end{cases}$$

6. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = \sin x \cos x & ((t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (0, \pi)), \\ u(0, x) = \sin x & (x \in [0, \pi]), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

7. Legyen  $a > 0$ , és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0, a) \cap C^1([0, a]) : u'(0) = 0, u(a) = 0\}, \quad Lu := -u'' + u$$