

5. feladatsor  
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2015. ősz

1. Mutassuk meg, hogy az  $u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + a_1u' + a_0u$  egydimenziós differenciáloperátor egy  $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  alapmegoldása

$$E(t) := \begin{cases} y(t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, \end{cases}$$

ahol  $y \in C^m(0, \infty) \cap C^{m-1}([0, \infty))$ , amelyre

$$\begin{aligned} y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= 0 \quad \text{a } (0, \infty)\text{-en,} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \dots, y^{(m-2)}(0) = 0, y^{(m-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg a következő egydimenziós differenciáloperátorok egy-egy  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  alapmegoldását!

a)  $u' + au$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

b)  $u'' + a^2u$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

3. Határozzuk meg a következő közönséges differenciálegyenletek egy-egy  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  megoldását az alapmegoldások segítségével (ahol  $H$  a Heaviside-függvényt jelöli)!

a)  $u'' - 2u' + 2u = H$

b)  $u'' + 4u' = H$

c)  $u'' - 4u' + 4u = H$

4. Keressük meg az  $u'' - au' = \delta_1'$  egyenlet egy  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  megoldását, ahol  $a \in \mathbb{R}$  paraméter. Igaz-e, hogy van reguláris disztribúció megoldása az egyenletnek?

5. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg a következő  $n$ -dimenziós (ahol  $n$  az  $x$  változó dimenzióját jelöli) differenciáloperátorok egy-egy  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  alapmegoldását!

a)  $Lu = \partial_t u + b \cdot \text{grad } u + cu$ ,  $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  (transzportegyenlet)

b)  $Lu = \partial_t^2 u - \Delta u$ ,  $n = 1, 3$  (hullámegyenlet)

6. Az alapmegoldások felhasználásával határozzuk meg az  $Lu = f$  egyenlet egy  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  megoldását, ahol  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ , amelyre  $t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n$  esetén  $f(t, x) = 0$ , továbbá

a)  $Lu = \partial_t u + b \cdot \text{grad } u + cu$ ,  $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  (transzportegyenlet);

b)  $Lu = \partial_t^2 u - \Delta u$ ,  $n = 1, 3$  (hullámegyenlet).