

4. feladatsor  
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2016. ősz

1. Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \chi_{[a,b]}$  (az  $[a, b]$  intervallum karakterisztikus függvénye). Számítsuk ki  $f$  Fourier-transzformáltját!

2. Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-|x|}$ .

a) Igazoljuk, hogy  $(\mathcal{F}(f))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2}$ .

b) Bizonyítsuk be, hogy  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1 + \xi^2} d\xi = \pi e^{-|x|}$ .

3. Számítsuk ki az alábbi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények Fourier-transzformáltjait!

a)  $f(x) = e^{-x^2}$

b)  $f(x) = xe^{-x^2}$

4. Legyen  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > 0$  és  $\alpha$  multiindex. Igazoljuk, hogy az alábbi disztribúciók mindegyike temperált (azaz  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ -beli), majd számítsuk ki a Fourier-transzformáltjukat!

a)  $\delta_a$

b)  $1$

c)  $\partial^\alpha \delta_a$

d)  $x^\alpha$

e)  $\delta_{S_R(0)}$  ( $n = 3$ )

5. Igazoljuk, hogy  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  esetén

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

6. Tegyük fel, hogy az  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  függvényre  $f * f = f$ . Mutassuk meg, hogy ekkor  $f = 0$  m. m. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  függvény, amelyre  $f * g = g$  minden  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  esetén.

7. Határozzuk meg az  $y' = 0$  egyenlet összes  $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  megoldását!

8. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg az  $xy = 0$  egyenlet összes  $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!

9. A Fourier-transzformáció segítségével keressük meg az  $x^m y = 0$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) egyenlet összes  $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!