10. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2016. ősz

1. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Értelmezzük az alábbi klasszikus elliptikus peremérték-feladatok általánosított alakját $H^1(a,b)$-ben ($f \in L^2(a,b)$ mellett), majd fogalmazzunk meg az általánosított, illetve klasszikus megoldás létezésével, valamint regularitásával kapcsolatos állításokat!

   a)
$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, & \\ u(b) = 0. & \end{cases}$$

   b)
$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-n}, \\ u'(a) = u(a), & \\ u(b) = 0. & \end{cases}$$

   c)
$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = u(b), & \\ u'(a) = u'(b). & \end{cases}$$

2. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum, $p \in C^1([a,b])$, $p > 0$, $r, q \in C([a,b])$. Tekintsük a következő klasszikus peremérték-feladatot (Sturm-Liouville-feladat):

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & (a,b)\text{-n}, \\ u(a) = 0, & \\ u(b) = 0. & \end{cases}$$

   Az r/p függvény egy primitív függvényének segítségével írjuk át a feladatot szimmetrikus alakra! Értelmezzük ezután a feladat általánosított alakját $H^1(a,b)$-ben ($f \in L^2(a,b)$ mellett), majd fogalmazzunk meg az általánosított, illetve klasszikus megoldás létezésével, valamint regularitásával kapcsolatos állításokat!

3. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelynek pereme folytonosan differenciálható. Tekintsük a következő úgynevezett *biharmonikus egyenletre* vonatkozó peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \Omega\text{-n}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0. & \end{cases}$$

   Az $u \in H_0^2(\Omega)$ függvényt általánosított megoldásnak nevezzük, ha minden $v \in H_0^2(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega f v.$$

   Igazoljuk, hogy minden $f \in L^2(\Omega)$ esetén a fenti peremérték-feladatnak egyértelműen létezik általánosított megoldása!