8. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2015. ősz

1. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $W^{1,p}(a,b) \subset L^\infty(a,b)$, továbbá a beágyazás operátora korlátos.

2. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $W^{1,p}(a,b) \subset C([a,b])$, továbbá a beágyazás operátora korlátos. (A $W^{1,p}(a,b) \subset C([a,b])$ tartalmazást úgy értjük, hogy minden $u \in W^{1,p}(a,b)$ függvényhez létezik $\tilde{u} \in C([a,b])$ függvény, amelyre $u = \tilde{u}$ m.m. az $[a,b]$ intervallumon.)

3. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $u \in W^{1,p}(a,b)$ esetén érvényes a Newton–Leibniz-formula, vagyis ($u$ folytonos reprezentánsát tekintve)
$$\int_a^b u' = u(b) - u(a).$$

4. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor a $W^{1,p}(a,b)$ tér pontosan azon $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ függvényekből áll, amelyek abszolút folytonosak és (a m.m. értelmezett klasszikus deriváltra) $u' \in L^p(a,b)$. Speciálisan, $W^{1,1}(a,b)$ pontosan az $[a,b]$ intervallumon abszolút folytonos függvényekből áll.

5. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Lássuk be, hogy ekkor a $W^{k,p}(a,b)$ tér pontosan azon $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ függvényekből áll, amelyek $(k-1)$-szer folytonosan differenciálhatók az $[a,b]$ intervallumon, $u^{(k-1)}$ abszolút folytonos, és (a m. m. értelmezett klasszikus deriváltra) $u^{(k)} \in L^p(a,b)$.

6. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $W^{1,p}(a,b) \subset C^{0,1-\frac{1}{p}}([a,b])$, továbbá a beágyazás operátora korlátos. Igazoljuk, hogy az $u(x) = x^{1-\frac{1}{p}}$ függvényre $u \in C^{0,1-\frac{1}{p}}([0,1])$, de $u \notin W^{1,p}(0,1)$.

7. Tegyük fel, hogy $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $W^{1,\infty}(a,b)$ tér az $[a,b]$ intervallumon Lipschitz-folytonos függvényekből áll.

8. Legyen $1 \le p < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset C_*(\mathbb{R})$ (ahol $C_*(\mathbb{R})$ azon $u \in C(\mathbb{R})$ függvények halmaza, amelyekre $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$), továbbá a beágyazás operátora korlátos.

9. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $u, v \in W^{1,p}(a,b)$ esetén $uv \in W^{1,p}(a,b)$, sőt $(uv)' = u'v + uv'$. Ezenkívül létezik $c > 0$ konstans, hogy minden $u, v \in W^{1,p}(a,b)$ esetén $\|uv\|_{W^{1,p}(a,b)} \le c\|u\|_{W^{1,p}(a,b)}\|v\|_{W^{1,p}(a,b)}$.