

5. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2015. ősz

1. Mutassuk meg, hogy az $u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + a_1u' + a_0u$ egydimenziós differenciáloperátor egy $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldása

$$E(t) := \begin{cases} y(t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, \end{cases}$$

ahol $y \in C^m(0, \infty) \cap C^{m-1}([0, \infty))$, amelyre

$$\begin{aligned} y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= 0 \quad \text{a } (0, \infty)\text{-en,} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \dots, y^{(m-2)}(0) = 0, y^{(m-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg a következő egydimenziós differenciáloperátorok egy-egy $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldását!

a) $u' + au$ ($a \in \mathbb{R}$)

b) $u'' + a^2u$ ($a \in \mathbb{R}$)

3. Határozzuk meg a következő közönséges differenciálegyenletek egy-egy $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ megoldását az alapmegoldások segítségével (ahol H a Heaviside-függvényt jelöli)!

a) $u'' - 2u' + 2u = H$

b) $u'' + 4u' = H$

c) $u'' - 4u' + 4u = H$

4. Keressük meg az $u'' - au' = \delta_1'$ egyenlet egy $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ megoldását, ahol $a \in \mathbb{R}$ paraméter. Igaz-e, hogy van reguláris disztribúció megoldása az egyenletnek?

5. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg a következő n -dimenziós (ahol n az x változó dimenzióját jelöli) differenciáloperátorok egy-egy $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ alapmegoldását!

a) $Lu = \partial_t u + b \cdot \text{grad } u + cu$, $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (transzportegyenlet)

b) $Lu = \partial_t^2 u - \Delta u$, $n = 1, 3$ (hullámegyenlet)

6. Az alapmegoldások felhasználásával határozzuk meg az $Lu = f$ egyenlet egy $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldását, ahol $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, amelyre $t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(t, x) = 0$, továbbá

a) $Lu = \partial_t u + b \cdot \text{grad } u + cu$, $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (transzportegyenlet);

b) $Lu = \partial_t^2 u - \Delta u$, $n = 1, 3$ (hullámegyenlet).