3. feladatsor

Alkmat/Mat MSc parcdiff 2015. ősz

1. Jelölje $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, mérhető halmaz esetén χ_H a halmaz karakterisztikus függvényét és legyen $\lambda(H)$ a halmaz Lebesgue-mértéke. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, mérhető halmazokra
$$(\chi_A * \chi_B)(x) = \lambda(A \cap (x - B)) = \lambda((x - A) \cap B) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

2. Határozzuk meg a $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$, $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ függvényeket!

3. Legyenek $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallumok. Adjuk meg a $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ függvényt!

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-|x|}$. Mutassuk meg, hogy $(f * f)(x) = e^{-|x|}(1 + |x|)$.

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$. Mutassuk meg, hogy $(f * f)(x) = \dfrac{2(2 + 2|x|)}{(2 + |x|)|x|} \log(1 + |x|)$.

6. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Hogyan hatnak a $\delta_a * \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $\delta_a * T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre?

7. Adjunk meg olyan (Dirac-deltától különböző) $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciókat, amelyekre
   a) $(u * v)(\varphi) = \partial_1^2 \varphi(1, 1)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén;
   b) $(u * v)(\varphi) = \partial_1 \varphi(1, 1) + \partial_1 \partial_2 \varphi(2, 2)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén.

8. Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre létezik $u * v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Bizonyítsuk be, hogy
$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v},$$
ahol $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{y + z \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp} u, z \in \operatorname{supp} v\}$. Adjunk meg olyan u és v disztribúciókat, amelyek esetében szigorú tartalmazás teljesül. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség áll fenn. Igazoljuk, hogy a lezárás nem hagyható el!

9. Legyenek $u, v, w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a következő disztribúciók: $u = T_H$, $v = \delta_0'$ és $w = T_1$ (ahol H a Heaviside-függvényt, az 1 pedig az azonosan 1 függvényt jelöli). Bizonyítsuk be, hogy $(u * v) * w$ és $u * (v * w)$ létezik, de nem egyenlőek.

10. Legyen $u = v = T_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $w = \delta_0' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Igazoljuk, hogy $u * (v * w)$ értelmes, de $(u * v) * w$ nem létezik.

11. Tegyük fel, hogy az $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciókra $u * v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?