11. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2015. ősz

1. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = 0,\ u'(a) = 0\}, \quad Lu := -u''$$

2. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit! Mutassuk meg, hogy az operátornak van negatív sajátértéke is!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u'(0) = u(0),\ u'(a) = u(a)\}, \quad Lu := -u''$$

3. Legyen $a_i > 0$ $(i = 1, 2)$, továbbá

$$D_i := \{u \in C^2(0,a_i) \cap C^1([0,a_i]) : u(0) = u(a_i) = 0\} \quad (i = 1, 2).$$

Adjunk meg olyan L másodrendű differenciáloperátort és a_1, a_2 számokat, hogy $D(L) = D_1$ esetén L-nek nincs negatív sajátértéke, azonban $D(L) = D_2$ esetén van.

4. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatokat!

a) $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+), \\ u(t,\pi) = \pi t & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \sin 2x \cos 2x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin 3x - 4 \sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t \cos x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u'(t,0) = u'(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

5. Oldjuk meg az alábbi hiperbolikus vegyes feladatokat!

a) $$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 2e^{-t} \sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin x & (x \in [0,\pi]), \\ \partial_t u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t \sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin x & (x \in [0,\pi]), \\ \partial_t u(0,x) = \sin x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = (t^2 + 2) \sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 2 \sin x & (x \in [0,\pi]), \\ \partial_t u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

6. Tegyük fel, hogy (f_j) teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_1)$-ben, (g_j) teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_2)$-ben, ahol $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$. Tekintsük az $f_i \times g_j \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $(f_i \times g_j)(x,y) := f_i(x) g_j(y)$ függvényeket $(i, j = 1, 2, \dots)$. Igazoljuk, hogy $(f_i \times g_j)$ teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$-ben.