

Tamás Klára

Szélsőérték-feladatok és nevezetes egyenlőtlenségek – eszközök a középiskolai matematika szerszámosládájából

Szakdolgozat

Osztatlan tanári szak
Matematika-fizika

Témavezető:

Besenyei Ádám
Egyetemi docens

Matematika Intézet
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2019

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Még, még, még – megoldásból sosem elég	4
1.1. Hasznos észrevételek	4
1.2. Deriváljunk!	5
1.3. Egy kis trigonometria	6
1.4. Színre lép a CBS	8
1.5. Beköszönnek a közepek	10
1.6. Megérkezik a négyzetes közép	12
1.7. Közepes súlyok helyett súlyos közepek	13
1.8. Hogy jön ide egy paraméteres diszkrimináns?	16
1.9. Az algebra találkozása a geometriával	17
1.10. Bemutatkoznak a Lagrange-multiplikátorok	18
2. Maximumkeresés harmadfokon	22
2.1. Előzetes meggondolások	22
2.2. Ismét közepek a láthatáron	22
2.3. UV trükk	26
2.4. Ismerkedjünk Bernoullival!	28
2.5. Kilyukadunk a Cardano-formulánál	30
3. Melyik forgáskúp IQ-ja a legnagyobb?	33
3.1. Általános vs. speciális	33
3.2. Diszkriminánsra találva	34
3.3. Deriválni még ezt is lehet	36
3.4. Ismét feltűnnek a közepek	38
3.5. Négyzetes középpel furfangosan	39
3.6. Fordítsuk ki a kérdést!	40
3.7. Testek IQ versenye	42
4. Módszertani kitekintés	44
4.1. Kerettantervi környezet	44
4.2. Egy lehetséges 15 tanórás tematikus terv	45
4.3. Az 1. fejezet 1. feladata diákszemmel	53
Irodalomjegyzék	55

Bevezetés

Szakdolgozatom témájának szélsőérték-feladatokat választottam, amelyeknek tárgyalása során igen gyakran nevezetes egyenlőtlenségek is felbukkannak, sőt szinte elválaszthatatlanul összefonódik a két terület. Mindkét témakör általában fakultáción vagy speciális matematika tagozaton kerül terítékre nagyobb óraszámban, az alapórákon az ilyen típusú feladatokból csupán egyszerűbbek kerülnek szóba. Azért esett választásom erre a témakörre, mert az egyes feladatok megoldásához egészen sokféle úton eljuthatunk, s talán ez a sokszínűség felkeltheti a diákok érdeklődését a középiskolában. Izgalmas felfedezni e feladatok révén a különféle kapcsolódási pontokat az analízis, az algebra és a geometria között. Céljaink között szerepel annak szemléltetése is, hogy egy középiskolás számára milyen eszköztár áll rendelkezésére különböző szélsőérték-feladatok megoldásához.

A dolgozatban három, kifejezetten középiskolás diákok számára kitűzött feladattal foglalkozunk részletesen. Az első fejezetben egy kétismeretlenes kifejezés feltételes szélsőértékét keressük meg. Ehhez kilenc megoldási útvonalat gyűjtöttünk össze: használjuk a differenciálszámítás és a trigonometria eszközeit, a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget, előkerülnek a nevezetes közepek többféleképpen is, végzünk diszkriminánsvizsgálatot, okoskodunk koordináta geometriai úton, míg végül a Lagrange-multiplikátorok módszeréig is eljutunk.

A második fejezetben egy harmadfokú kifejezés maximumát keressük, még hozzá elemi úton, a differenciálszámítás fegyvertára nélkül. Ennek a feladatnak a megoldásához ismét a nevezetes közepeket hívjuk segítségül, majd fölbukkan a Bernoulli-egyenlőtlenség és a Cardano-formula is.

A harmadik fejezetben egy geometriai kérdésre keressük a választ: adott térfogatú forgáskúpok között melyiknek a lehető legkisebb a felszíne? Ehhez először diszkriminánsvizsgálatot végzünk, majd deriválással is megoldjuk a feladatot, utána pedig a nevezetes közepekkel történő okoskodás sem maradhatnak el, végül pedig egy „fordított” útvonalat bejárva jutunk el a minimális felszínig. A megoldások után kitérünk arra is, mit nevezünk testek izoperimetrikus hányadosának (röviden IQ-nak), és ennek tulajdonképpen mi köze van a feladathoz.

A negyedik fejezetben egy lehetséges tematikát állítottunk össze a *Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása* című témakör tanításához, amelyre az emelt matematika óraszámú kerettanterv 15 tanórát szán a 11–12. osztályban.

1. fejezet

Még, még, még – megoldásból sosem elég

Első feladatunkban egy kétváltozós lineáris kifejezésnek keressük a szélsőértékeit egy bizonyos feltétel mellett. Azért választottuk ezt a feladatot, mert rendkívül sokféleképpen meg lehet oldani, és kiválóan érzékelteti az analízis, az algebra és a geometria összefonódását. A feladathoz összesen kilencféle megoldást ismertettünk, amelyek zöme középiskolás módszerekre épül. Többek között felbukkannak a nevezetes közepek, a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség és a trigonometrikus addíciós képletek. Kalandozásunk végén egy felsőbb matematikai eszközöket igénylő megoldást is mutatunk, amely Joseph Louis Lagrange francia matematikus nevéhez fűződik. A feladat eredetileg a [10] könyvben a 447. feladatként volt kitűzve, de megtalálható például a [2] példatárban is mint a 2.40. feladat.

1. Feladat. Az x, y számok kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ feltételt. Határozzuk meg a $2x + 3y$ kifejezés lehetséges legnagyobb és legkisebb értékét!

1.1. Hasznos észrevételek

Az x, y számok nem lehetnek akármilyenek, mert az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel teljesüléséhez nyilvánvalóan szükséges, hogy $-1 \leq x \leq 1$ és $-1 \leq y \leq 1$ igaz legyen. Ezzel megadtuk, hogy a $2x + 3y$ kifejezésben milyen nagyságú és előjelű x, y értékek szerepelhetnek. Ezt felhasználva némileg egyszerűbbé tehetjük a szélsőértékek megkeresését.

Vegyük észre ugyanis, hogy ha a $2x + 3y$ kifejezésnek az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett maximuma van az $(x_0; y_0)$ számpárban, akkor igaz kell legyen, hogy $x_0 \geq 0$ és $y_0 \geq 0$. Ugyanis tegyük fel például, hogy $x_0 < 0$ lenne: ekkor $-x_0 > x_0$ teljesülne, vagyis a $2(-x_0) + 3y_0 > 2x_0 + 3y_0$ egyenlőtlenség is igaz volna, $(-x_0)^2 + y_0^2 = 1$ is teljesülne, tehát a $(-x_0; y_0)$ számpárra nagyobb függvényértéket kapnánk, ami nem lehet, hiszen az $(x_0; y_0)$ számpárban feltételes maximuma van a kifejezésünknek. Elég tehát a $2x + 3y$ kifejezés legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0$ és $y \geq 0$ feltételek mellett keresnünk.

Hasonló okoskodással láthatjuk, hogy a $2x + 3y$ kifejezés a minimumát csak $x \leq 0, y \leq 0$ értékeknél veheti föl. Sőt, mivel $2(-x) + 3(-y) = -(2x + 3y)$, ezért világos, hogy ha egy $(x_0; y_0)$ számpárban maximuma van a kifejezésnek, akkor a $(-x_0; -y_0)$ számpárban minimuma lesz a kifejezésünknek, és a minimum értéke éppen a maximum értékének az ellentettje. Ezért a továbbiakban mindig a maximumkereséssel fogunk foglalkozni, mert ha a maximum helyét és értékét megtaláltuk, akkor abból már tudunk következtetni a minimumra.

1.2. Deriváljunk!

Aki már tanult differenciálszámítást, az bizonyára gyakran hívja segítségül a deriválást szélsőérték-feladatok megoldásához, ezért talán célszerű ezzel a kézenfekvő megoldási módszerrel kezdenünk. A megoldásunk alapötlete, hogy visszavezetjük a feladatot egy egyváltozós folytonos és differenciálható függvény korlátos zárt intervallumon való szélsőérték-keresésére. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, hogy az $x^2 + y^2 = 1$ feltételből az x vagy az y változót kifejezzük, majd azt beírjuk a maximalizálandó $2x + 3y$ kifejezésbe. Ekkor a kifejezésünk egyetlen változó függvényévé alakul át, így megfelelő feltételek mellett a kapott függvényre alkalmazhatók az analízis eszközei.

Mielőtt a konkrét magvalósításnak nekivágunk, érdemes feleleveníteni korlátos zárt intervallumon értelmezett egyváltozós függvények szélsőértékeivel kapcsolatos ismereteinket. Folytonos függvény esetén Weierstrass tétele biztosítja a szélsőérték létezését.

1.1. Tétel (Weierstrass II. tétele). *Ha egy f valós függvény folytonos az $[a; b]$ korlátos zárt intervallumon (ahol $a < b$), akkor f függvényértékei között van legnagyobb és legkisebb az $[a; b]$ intervallumon.*

Keressük most egy folytonos $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit úgy, hogy tudjuk, hogy az f differenciálható az $(a; b)$ intervallumon. A tétel által garantált szélsőértékek kétféle helyen fordulhatnak elő: az intervallum valamelyik végpontjában vagy az intervallum egy belső pontjában, de ekkor ez a pont egyúttal lokális szélsőértékhely is. Ha a szóban forgó függvénynek az $(a; b)$ intervallum valamely pontjában lokális szélsőértéke van, akkor a lokális szélsőértékhelyen a függvény deriváltja 0, tehát a továbbiakban az f függvényünk szélsőértékhely-jelöltjei a következők: az intervallum két végpontja, valamint az (a, b) intervallum azon pontjai, ahol a derivált 0. A szélsőértékhely-jelöltek közül az lesz a maximumhely, ahol a függvényérték a legnagyobb (esetleg több ilyen hely is lehet), és az a minimumhely, ahol a függvényérték a legkisebb (ilyenből is lehet több).

Mindezek után térjünk rá a konkrét feladatra. Ahogy az 1.1 szakaszban észrevettük, elegendő az $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$ és $y \geq 0$ feltételek mellett megkeresnünk a $2x + 3y$ kifejezés maximumát.

Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlőséget rendezzük x -re, és a kapott kifejezést helyettesítsük be a $2x + 3y$ összegbe. Mivel $x^2 = 1 - y^2$, ezért $x = \sqrt{1 - y^2}$ vagy $x = -\sqrt{1 - y^2}$. A második esettel nem kell foglalkoznunk a maximumkeresésünk során, hiszen $x \geq 0$ helyen lehet csak a keresendő maximum.

Tehát a továbbiakban az $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(y) = 2\sqrt{1 - y^2} + 3y$$

egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük. Az f függvény folytonos és a $(0; 1)$ intervallumon differenciálható, ezért az előbbieken felelevenített maximumkeresési eljárás alkalmazható. Ehhez deriváljuk a függvényt:

$$f'(y) = \frac{-2y}{\sqrt{1 - y^2}} + 3.$$

Ott lehet belső pontban szélsőérték, ahol $f'(y) = 0$, ezért keressük a

$$\frac{-2y}{\sqrt{1 - y^2}} + 3 = 0$$

egyenlet megoldásait. Átalakítva:

$$2y = 3\sqrt{1 - y^2}.$$

Ennek négyzetre emelése akkor ekvivalens átalakítás, ha $0 \leq y \leq 1$. Ez most teljesül. Négyzetre emelés után azt kapjuk, hogy

$$4y^2 = 9 - 9y^2,$$

ebből pedig

$$y = \pm \frac{3}{\sqrt{13}},$$

de a $0 \leq y \leq 1$ feltétel miatt csak az $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$ hely jön szóba. Most összehasonlítjuk a függvény itteni értékét és az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékeket, és eldöntjük, hogy melyik valójában a maximum:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3, \\ f(0) &= 2, \\ f\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) &= \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \quad (> \sqrt{9} = 3). \end{aligned}$$

Ezek alapján a megadott feltételek mellett a $2x + 3y$ kifejezésnek az

$$y = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{és} \quad x = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

helyen van maximuma.

Hátravan még a minimum meghatározása, amely viszont az 1.1. szakaszban megfogalmazott észrevételekből adódóan az

$$y = -\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{és} \quad x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

helyen van. Itt a kifejezésünk értéke $-\sqrt{13}$. Összefoglalva tehát a $2x + 3y$ kifejezésnek az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett a legnagyobb értéke $\sqrt{13}$, a legkisebb értéke pedig $-\sqrt{13}$.

1.3. Egy kis trigonometria

Második megoldásunk is igen természetes, ha valaki jól bánik a trigonometrikus függvényekkel. Az $x^2 + y^2 = 1$ összefüggés láttán ugyanis tüstént eszünkbe juthat, hogy ezt az egyenletet pontosan az origó középpontú egységkörvonal pontjainak koordinátái elégítik ki. Az egységkör egy $(x; y)$ pontjának első koordinátája éppen $\cos \alpha$, a második koordinátája pedig $\sin \alpha$, ahol α a pont helyvektorának az irányszöge ($0 \leq \alpha < 2\pi$), lásd az 1.1. ábrát.

Érdemesnek látszik bevezetni az

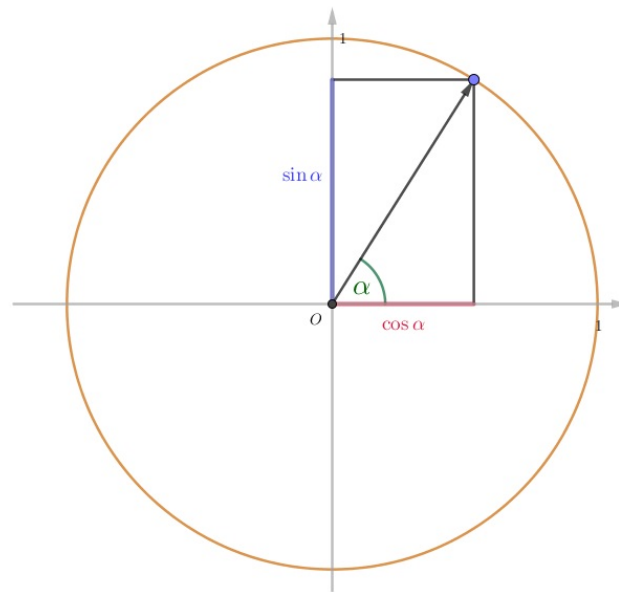
$$x = \sin \alpha \quad \text{és} \quad y = \cos \alpha$$

helyettesítést. Ekkor a $2x + 3y$ kifejezés is módosul:

$$2x + 3y = 2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha.$$

A továbbiakban tehát az $f(\alpha) = 2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha$ egyváltozós függvénynek a szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit keressük a $0 \leq \alpha < 2\pi$ feltétel mellett. Folytonos és az intervallum belsejében differenciálható függvényről lévén szó, ezt könnyen megtehetjük az első megoldáshoz hasonlóan deriválással. Ebben voltaképpen nincs új ötlet az első megoldáshoz képest, ezért ennek kifejtésétől most eltekintünk.

Van azonban egy másik lehetőség is, ha feltűnik, hogy a $2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha$ kifejezés hasonlít egy trigonometrikus addíciós képletre. Például a következő állítás juthat eszünkbe.



1.1. ábra. Az egységkör pontjainak koordinátái

1.2. Tétel (Két tag különbségének koszinusza). *Tetszőleges α és β valós számok esetén igaz, hogy*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Világosan látható, hogy $\cos(\alpha - \beta)$ kifejtésében is a $\sin \alpha$ és a $\cos \alpha$ értékek jelennek meg valamilyen együttthatókkal. Ha el tudnánk érni, hogy $\cos \beta = 3$ és $\sin \beta = 2$ legyen, akkor éppen a vizsgálandó függvényünket nyernénk. Sajnos azonban nincs olyan β szög, amelyre ez igaz lenne, mert $-1 \leq \cos \beta \leq 1$ és $-1 \leq \sin \beta \leq 1$ bármilyen β szög esetén.

Az viszont elérhető, hogy $A \cos \beta = 3$ és $A \sin \beta = 2$ legyen valamilyen A valós szám és $0 \leq \beta < 2\pi$ esetén. Ekkor igaz a következő egyenlőség:

$$9 + 4 = 13 = (A \cos \beta)^2 + (A \sin \beta)^2 = A^2(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = A^2.$$

Ha például $A = \sqrt{13}$, akkor a

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

feltételhez már létezik $0 \leq \beta < 2\pi$ szög (lásd az 1.2. ábrát).

Legyen tehát $0 \leq \beta < 2\pi$ az az egyértelműen létező szög, amelyre igaz, hogy $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ és $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Ekkor

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \cos \alpha + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}(2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha),$$

azaz

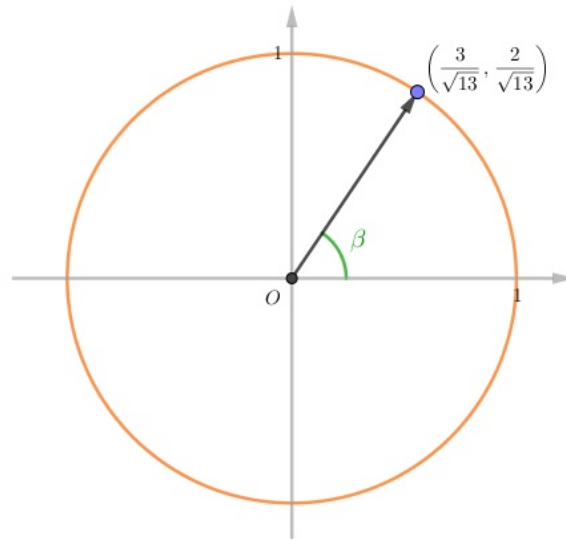
$$f(\alpha) = \sqrt{13} \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Ebből már azonnal adódik, hogy

$$-\sqrt{13} \leq f(\alpha) \leq \sqrt{13}.$$

Innen az f maximumértékét a

$$\cos(\alpha - \beta) = 1$$

1.2. ábra. A β irányszögű helyvektor koordinátái

esetben kapjuk. Mivel $\alpha, \beta \in [0; 2\pi)$, ezért $-2\pi < \alpha - \beta < 2\pi$, így $\cos(\alpha - \beta) = 1$ csakis $\alpha = \beta$ esetén teljesülhet. Ebben az esetben

$$x = \sin \alpha = \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \text{és} \quad y = \cos \alpha = \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Vagyis a $2x + 3y$ kifejezés a kapott $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ helyen veszi föl a legnagyobb értékét, ami $\sqrt{13}$, és minimumát az 1.1. szakasz alapján a $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}; -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ helyen, a minimum értéke pedig $-\sqrt{13}$.

1.4. Színre lép a CBS

A következő megoldás megtalálásához az adhatja a kezdő ötletet, ha észrevevessük, hogy a vizsgálandó $2x + 3y$ kifejezésben elbújik egy skaláris szorzat. A skaláris szorzat kétféle kiszámítási módszerével hamar eljuthatunk a következő nevezetes egyenlőtlenséghez.

1.3. Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség). *Tetszőleges a, b, c, d valós számokra*

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $ad = bc$.

Első bizonyítás. Írjuk fel az $(a; b)$ és a $(c; d)$ vektorok skalárszorzatát kétféleképpen. Egyrészt definíció szerint:

$$(a; b) \cdot (c; d) = |(a; b)| \cdot |(c; d)| \cdot \cos \varphi,$$

ahol φ a két vektor által közbezárt szög ($0 \leq \varphi \leq \pi$), és az abszolút érték a vektorok hosszát jelöli. Másrészt ismeretes, hogy egy derékszögű koordináta-rendszerben a skalárszorzat kiszámítható a koordináták segítségével a következőképpen:

$$(a; b) \cdot (c; d) = ac + bd.$$

A kétféle felírás egyenlősége azt jelenti, hogy igaz az alábbi összefüggés:

$$|ac + bd| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot |\cos \varphi|.$$

Tudjuk, hogy $|\cos \varphi| \leq 1$, ezért a jobb oldal legfeljebb $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$, és éppen ezt állítja a tétel.

Hátravan az egyenlőségre vonatkozó állítás bizonyítása. Az előbbieket alapján az

$$|ac + bd| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\cos \varphi = \pm 1$, azaz a két vektor párhuzamos egymással. Ekkor viszont az egyik vektor a másiknak a λ -szorososa, ahol λ valós szám. A két vektor szimmetrikus szerepe miatt feltehető, hogy $(a; b) = \lambda \cdot (c; d)$, azaz $a = \lambda c$ és $b = \lambda d$. Ha $c \neq 0$ és $d \neq 0$, akkor $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$, ami átrendezve pontosan az $ad = bc$ egyenlőség. Ha például $c = 0$, akkor $a = 0$ is igaz, tehát akkor is fennáll az $ad = bc$ egyenlőség. Hasonlóan igaz lesz ez $d = 0$ esetén is. Megfordítva, ha $ad = bc$, akkor $c = 0$ esetén $a = 0$ vagy $d = 0$. Előbbi esetben a $(0; b)$ és $(0; d)$ vektorok nyilván párhuzamosak, utóbbi esetben $(c; d)$ nullvektor, amely definíció szerint minden vektorral párhuzamos. $\square$

Második bizonyítás. A második bizonyításhoz nem használjuk ki a skaláris szorzásra vonatkozó összefüggéseket, ezzel mutatva, hogy az összefüggés valójában egyszerű algebrai átalakításokkal is igazolható. Az egyenlőtlenség mindkét oldalának négyzetre emelése ekvivalens átalakítás, mert mindkét oldal nemnegatív. Ekkor ezt kapjuk:

$$a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

A tagok egy oldalra rendezésével adódik:

$$0 \leq a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (ad - bc)^2.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, mert egy valós szám négyzete valóban mindig nemnegatív. Ebből következtethetünk arra, hogy az eredeti egyenlőtlenségünk is igaz volt, hiszen mindvégig ekvivalens átalakításokat végeztünk.

Világosan látszik az is, hogy a $0 = (ad - bc)^2$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $ad = bc$. Vagyis az eredeti összefüggésben is pontosan ez az egyenlőség feltétele. $\square$

Az 1.3. Tételt alkalmazhatjuk a jelenlegi feladatunkra. A mi esetünkben most $a = 2$, $b = 3$, $c = x$ és $d = y$. Ezeket behelyettesítve ezt kapjuk:

$$|2x + 3y| \leq \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Az eredeti $x^2 + y^2 = 1$ feltétel alapján sokat egyszerűsödik az iménti összefüggés:

$$|2x + 3y| \leq \sqrt{13}.$$

Tehát a $2x + 3y$ kifejezésnek felső korlátja a $\sqrt{13}$, és alsó korlátja a $-\sqrt{13}$.

Az 1.3. Tétel alapján azt is tudjuk, hogy pontosan akkor lesz $|2x + 3y| = \sqrt{13}$, ha $2y = 3x$. Ebből az x -et kifejezve: $x = \frac{2y}{3}$. Ezt beírva a $2x + 3y = \sqrt{13}$ egyenletbe (a maximumkereséskor elhagyhatjuk az abszolútérték jelet az 1.1. szakaszban leírtak alapján): $\frac{4y}{3} + 3y = \frac{13y}{3} = \sqrt{13}$, vagyis $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Ugyanakkor $x = \frac{2y}{3} = \frac{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}}{3} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, azaz a maximumát $x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ és $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$ esetén veszi fel a $2x + 3y$ kifejezés.

Hasonlóan, a $2x + 3y = -\sqrt{13}$ egyenlőség teljesüléséhez a $2y = 3x$ feltétel szükséges. Az előbbieket mintájára történő számolás után az $x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ és $y = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ eredményeket kapjuk. Itt minimális a kifejezésünk értéke.

A megoldás végeztével érdemes megjegyezni, hogy a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget általánosíthatjuk n dimenziós vektorok esetére is. Ekkor a következő formát ölti.

1.4. Tétel (CBS általánosítása). *Tetszőleges $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ valós számokra*

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség mindkét oldalán lévő kifejezés nemnegatív, ezért a négyzetre emeléssel mint ekvivalens átalakítással az alábbi alakot nyerjük:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Rendezzük egy oldalra a tagokat:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (1.1)$$

A jobb oldalon egyrészt

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i^2 b_j^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{i < j} a_i^2 b_j^2 + \sum_{i < j} a_j^2 b_i^2,$$

másrészt

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{i < j} 2a_i b_j a_j b_i$$

szerepel. Ebből következően

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i < j} (a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_j a_j b_i + a_j^2 b_i^2) = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Vagyis az (1.1) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő különbség valójában négyzetek összege, ami tényleg sosem negatív. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti összefüggésünket is igazoltuk ezzel.

Sőt, a bizonyításból az is kiolvasható, hogy az egyenlőtlenségben pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha minden i, j -re $a_i b_j = a_j b_i$. Nem nehéz meggondolni, hogy ez utóbbi feltétel valójában azt jelenti, hogy az $(a_1; \dots; a_n)$ és $(b_1; \dots; b_n)$ vektorok egymással párhuzamosak. $\square$

1.5. Beköszönnek a közepek

Maximum és minimum kereséséhez a különböző közepek közötti összefüggések nagyon gyakran jól alkalmazhatóak, feltéve, ha észrevesszük, melyiket érdemes alkalmaznunk, és éppen mik a közepekben szereplő tagok. Az alábbiakban, továbbá a következő két szakaszban összesen három megoldást mutatunk arra, hogy az 1. feladatban milyen lehetőségeink vannak közepek alkalmazására.

A két legismertebb közép a számtani és a mértani közép, amelyekkel kapcsolatban a következő egyenlőtlenség középiskolában is elhangzik.

1.5. Tétel (Számítási és mértani közép közti egyenlőtlenség két tagra). *Bármely a, b nemnegatív valós számok esetén igaz, hogy*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.

Bizonyítás. A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival:

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon éppen egy teljes négyzet áll:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Ez pedig nyilvánvalóan igaz, hiszen egy valós szám négyzete sosem negatív. Világosan látszik, hogy egyenlőséget pedig csakis akkor kapunk, ha $a = b$. $\square$

Próbáljuk meg a két közép közötti összefüggést alkalmazni a $2x + 3y$ kifejezés $x^2 + y^2 = 1$ feltétel melletti szélsőértékeinek meghatározására.

Az 1.1. szakasz miatt ismét csak a maximum megtalálásával fogunk foglalkozni. Ekkor mindenképpen $x \geq 0$ és $y \geq 0$, ezért $2x + 3y \geq 0$. Az ötlet az, hogy nem ennek a kifejezésnek a maximumhelyét keressük, hanem a négyzetének, mert a kifejezés nemnegativitása miatt annak a maximuma ugyanott van, csak más az értéke. Tehát a továbbiakban ezzel a kifejezéssel foglalkozunk:

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

A számítási és mértani közepek közti összefüggést a $12xy$ tagra fogjuk alkalmazni. A szereposztás a következő: $a = 9x^2$ és $b = 4y^2$. Ekkor az 1.5. Tétel alapján:

$$\frac{9x^2 + 4y^2}{2} \geq \sqrt{9x^2 \cdot 4y^2}. \quad (1.2)$$

Mivel $x, y \geq 0$, ezért

$$\sqrt{9x^2 \cdot 4y^2} = 6xy,$$

így az (1.2) egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

$$9x^2 + 4y^2 \geq 12xy.$$

Ezt kihasználva kapjuk, hogy

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 \leq 4x^2 + 9x^2 + 4y^2 + 9y^2 = 13x^2 + 13y^2 = 13(x^2 + y^2).$$

A feladat feltétele szerint $x^2 + y^2 = 1$, ezáltal jelentősen egyszerűsödik az iménti egyenlőtlenség:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 \leq 13.$$

Továbbá az 1.5. Tétel alapján azt is tudjuk, hogy pontosan akkor teljesül egyenlőség az (1.2) egyenlőtlenségben, ha $9x^2 = 4y^2$, azaz ebben az esetben fogjuk megkapni a keresett maximumot. Ezt az egyenletet az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett megoldva nyerjük, hogy a maximumhely az $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$ és $x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ értékeknél lesz. Az eredeti $2x + 3y$ kifejezés maximumértéke pedig ekkor $2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$. A minimumhely az 1.1. szakasz alapján úgy adódik, ha az előbb nyert x -nek és y -nak az ellentettjét vesszük, azaz $-y = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ és $-x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ helyen lesz a kifejezés értéke a lehető legkisebb. A minimum értéke pedig $-\sqrt{13}$.

1.6. Megérkezik a négyzetes közép

Az alábbi megoldásban egy újabb közép bukkan fel: a négyzetes közép. Ráadásul nem két tagra, hanem tetszőleges véges sok tagra.

1.6. Tétel (Számítási és négyzetes közepek közti összefüggés n tagra). *Bármely $A_1, \dots, A_n \geq 0$ valós számok esetén igaz, hogy*

$$\frac{A_1 + \dots + A_n}{n} \leq \sqrt{\frac{A_1^2 + \dots + A_n^2}{n}},$$

azaz a tagok számtani közepe mindig kisebb vagy egyenlő a négyzetes közepükénél. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $A_1 = \dots = A_n$.

Első bizonyítás. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. Ekkor első lépésben ilyen formát ölt az egyenlőtlenségünk:

$$\frac{(A_1 + \dots + A_n)^2}{n^2} \leq \frac{A_1^2 + \dots + A_n^2}{n}. \quad (1.3)$$

Az $A_1 + \dots + A_n$ kifejezés négyzetét úgy kapjuk meg, hogy minden tagot minden taggal megszorozunk:

$$(A_1 + \dots + A_n)^2 = \sum_{i,j=1}^n A_i A_j = \sum_{i=1}^n A_i^2 + \sum_{i \neq j} A_i A_j = \sum_{i=1}^n A_i^2 + 2 \sum_{i < j} A_i A_j.$$

Szorozzuk be az (1.3) egyenlőtlenséget n^2 -tel, és használjuk fel az előző átalakítást:

$$\sum_{i=1}^n A_i^2 + \sum_{i < j} 2A_i A_j \leq n \cdot \sum_{i=1}^n A_i^2.$$

A tagokat egy oldalra rendezve

$$0 \leq (n-1) \cdot \sum_{i=1}^n A_i^2 - \sum_{i < j} 2A_i A_j \quad (1.4)$$

adódik. Célszerű az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő első tagot a következő alakban írni:

$$(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n A_i^2 = \sum_{i < j} (A_i^2 + A_j^2).$$

Ekkor az (1.4) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő kifejezés négyzetek összegévé alakítható:

$$(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n A_i^2 - \sum_{i < j} 2A_i A_j = \sum_{i < j} (A_i^2 + A_j^2 - 2A_i A_j) = \sum_{i < j} (A_i - A_j)^2.$$

Tehát az (1.4) egyenlőtlenség valóban igaz, mert a jobb oldali kifejezés négyzetszámok összegével egyenlő, így sohasem negatív. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredetileg bizonyítandó állításunkat ezzel sikerült belátni. Az is világosan látszik, hogy a $\sum_{i < j} (A_i - A_j)^2$ kifejezés pontosan akkor egyenlő 0-val, ha $A_1 = \dots = A_n$. Vagyis az eredeti egyenlőtlenségben is pontosan ekkor áll fenn egyenlőség. $\square$

Második bizonyítás. A bizonyításhoz az 1.4. Tételt alkalmazzuk a következő szereposztással: legyenek $a_i = A_i$ és $b_i = 1$ minden $i = 1, \dots, n$ -re. Ekkor:

$$\left| \sum_{i=1}^n A_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \cdot \sqrt{n}.$$

Itt az abszolútértékjelek elhagyhatók, mert a tétel csak $A_1, \dots, A_n \geq 0$ számokról szól. Ha mindkét oldalt osztjuk n -nel, akkor megkapjuk a számtani és négyzetes közép közti összefüggést.

A tétel egyenlőségre vonatkozó része a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség egyenlőségre vonatkozó részéből következik. $\square$

A feladatmegoldásunkhoz alkalmazzuk az 1.6. Tételt mégpedig úgy, hogy legyen $n = 13$, továbbá $A_i = \frac{x}{2}$, ha $i = 1, \dots, 4$ és $A_i = \frac{y}{3}$, ha $i = 5, \dots, 13$. Ekkor ez adódik:

$$\frac{\overbrace{\frac{x}{2} + \dots + \frac{x}{2}}^{4 \text{ db}} + \overbrace{\frac{y}{3} + \dots + \frac{y}{3}}^{9 \text{ db}}}{13} \leq \sqrt{\frac{\overbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^2}^{4 \text{ db}} + \overbrace{\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{y}{3}\right)^2}^{9 \text{ db}}}{13}}. \quad (1.5)$$

Ennek bal és jobb oldala jelentősen leegyszerűsödik, ha az $x^2 + y^2 = 1$ feltételt is kihasználjuk:

$$\frac{2x + 3y}{13} \leq \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{x^2}{4} + 9 \cdot \frac{y^2}{9}}{13}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Ebből pedig következik, hogy

$$2x + 3y \leq \sqrt{13}.$$

A $2x + 3y$ kifejezés maximumát akkor fogjuk megkapni, ha az (1.5) egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn, vagyis $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. Ekkor az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel alapján megint eljutunk a korábban már kiszámolt $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ maximumhelyig, ahol a kifejezésünk értéke $\sqrt{13}$. Az 1.1. szakasz alapján pedig a minimumhely $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}; -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, ahol a kifejezés értéke pedig $-\sqrt{13}$.

1.7. Közepes súlyok helyett súlyos közepek

Az előző pontban használtuk a hagyományos számtani és négyzetes közepek közötti összefüggést. Ezt két tagra így is írhatnánk.

1.7. Tétel (Számtani és négyzetes közepek közti összefüggés két tagra). *Bármely $a, b \geq 0$ valós számok esetén igaz, hogy*

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.

Tekintsük a bal oldalon lévő kifejezésben az a -nak és a b -nek az együtthatóit: ezeket nevezzük súlyoknak. Ebben az esetben súlyoknak a $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{1}{2}$ számokat használjuk. A tétel általánosabban is érvényes $0 \leq t_1 \leq 1$ és $t_2 = 1 - t_1$ súlyokkal.

1.8. Tétel (Súlyozott számtani és négyzetes közepek közti összefüggés két tagra). *Bármely $a, b \geq 0$ valós számok és $0 \leq t \leq 1$ esetén igaz, hogy*

$$ta + (1 - t)b \leq \sqrt{ta^2 + (1 - t)b^2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $t = 0$ vagy $t = 1$ vagy $a = b$.

Első bizonyítás. Mivel az egyenlet mindkét oldala nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2.$$

Ezt 0-ra rendezve, majd a $t(1-t)$ tényezőt kiemelve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$0 \leq t(1-t)a^2 - 2t(1-t)ab + t(1-t)b^2 = t(1-t)(a^2 - 2ab + b^2) = t(1-t)(a-b)^2.$$

Mivel $t(1-t) \geq 0$, így az egyenlőtlenség mindig fennáll, hiszen $(a-b)^2$ valóban sosem negatív. Jól látszik, hogy egyenlőség csak akkor fog teljesülni, ha $t(1-t) = 0$ vagy $a-b = 0$, vagyis ha $t = 0$ vagy $t = 1$ vagy $a = b$. $\square$

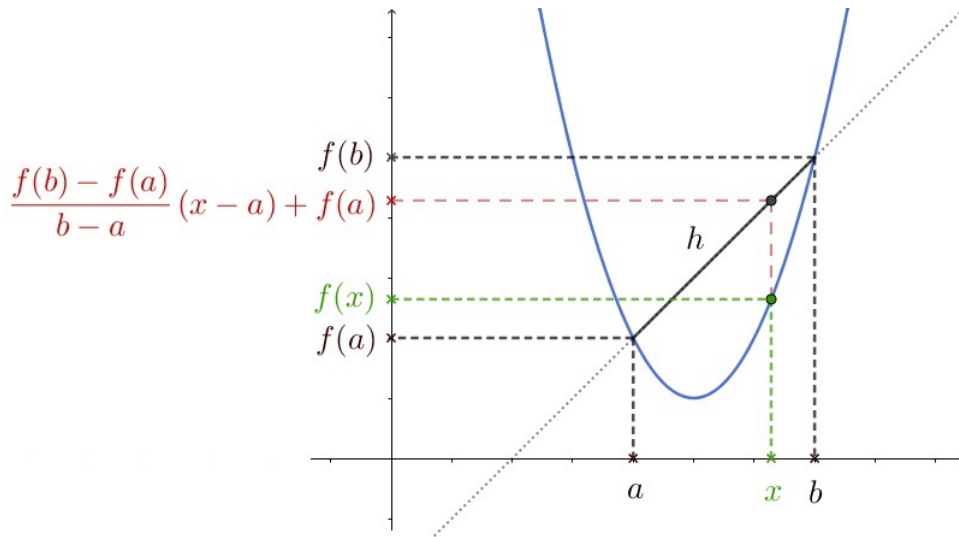
Második bizonyítás. Ehhez a bizonyításhoz a függvények konvexitását és egy ehhez köthető tételt, a Jensen-egyenlőtlenséget fogjuk felhasználni.

1.9. Definíció (függvény konvexitása). Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konvex* az I intervallumon, ha minden $a, b \in I, a < b$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad (a < x < b).$$

Ha az iménti egyenlőtlenségben minden $a < x < b$ esetén szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor az f függvényt *szigorúan konvexnek* nevezzük.

A definíció szemléletes jelentése az 1.3. ábrán látható: az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ pontokat összekötő húr a függvény grafikonja fölött helyezkedik el.



1.3. ábra. Konvexitás szemléletes jelentése

A definíció szerint könnyen beláthatjuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$ -en. Ehhez vegyünk tetszőleges $a < x < b$ számokat, ekkor

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) + a^2 = (b + a)(x - a) + a^2 = (b + a)x - ab.$$

A kérdés az, hogy igaz-e az alábbi egyenlőtlenség:

$$x^2 < (b + a)x - ab.$$

Ez átrendezve és beszorozva (-1) -gyel:

$$0 > x^2 - (b+a)x + ab = (x-a)(x-b).$$

Ez pedig teljesül, mert $x-a > 0$ és $x-b < 0$, tehát a szorzatuk negatív. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a kiindulási egyenlőtlenségünk is igaz, tehát az $f(x) = x^2$ függvény valóban szigorúan konvex az egész számegyenesen. Ezt hamarosan föl fogjuk használni.

Konvex függvényekkel kapcsolatban alapvetően fontos egyenlőtlenség a következő.

1.10. Tétel (Jensen-egyenlőtlenség). *Legyen f konvex függvény az I intervallumon. Ekkor tetszőleges $a_1, \dots, a_n \in I$ valós számok és $t_1, \dots, t_n > 0$, $t_1 + \dots + t_n = 1$ súlyok esetén igaz, hogy*

$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n).$$

Ha f szigorúan konvex, akkor szigorú egyenlőtlenség áll fenn, feltéve, hogy az a_i számok nem mind egyenlők, különben egyenlőség áll fenn.

A Jensen-egyenlőtlenség bizonyítása $n = 2$ esetén a konvexitás definíciójának szinte közvetlen átfogalmazása, a többi n esetén pedig a bizonyítása teljes indukcióval történhet, ami a [6] könyvben megtalálható.

Térjünk most vissza az 1.8. Tétel második bizonyítására. A Jensen-egyenlőtlenséget fogjuk használni a valós számok halmazán szigorúan konvex $f(x) = x^2$ függvényre, valamint az $a_1 = a$, $2 = b$, $t_1 = t$ és $t_2 = 1 - t$ számokra, ahol $a, b \geq 0$ valós számok és $t \in (0; 1)$. Az a_i és t_i számok ($i = 1, 2$) a Jensen-egyenlőtlenség feltételeinek megfelelnek, és az x^2 függvény valóban szigorúan konvex, tehát alkalmazható ezekre a tétel. Ezért igaz az, hogy

$$(ta + (1-t)b)^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért mindkét oldal négyzetgyökét véve ekvivalensen azt kapjuk, hogy

$$ta + (1-t)b \leq \sqrt{ta^2 + (1-t)b^2}.$$

Ezzel éppen a súlyozott számtani és négyzetes közepek közti összefüggés adódott. Az egyenlőség pedig a Jensen-egyenlőtlenségbeli egyenlőség esetén áll fenn, tehát valóban akkor, ha $a = b$. Hátravan még a $t = 0$ és a $t = 1$ eset, de ekkor nyilvánvalóan egyenlőség áll fenn az 1.8. Tételben, és ezzel a bizonyítás készen van. $\square$

Alkalmazzuk most az 1.8. Tételt a feladatunk megoldásához. Legyen $a = \frac{x}{2}$ a $t = \frac{4}{13}$ súllyal, és $b = \frac{y}{3}$ az $1 - t = \frac{9}{13}$ súllyal. Ekkor a tételben szereplő egyenlőtlenség ilyen alakot ölt:

$$\frac{4 \cdot \frac{x}{2} + 9 \cdot \frac{y}{3}}{13} \leq \sqrt{\frac{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^2}{13}}.$$

Ezt átalakítva adódik, hogy

$$\frac{2x + 3y}{13} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{13}}.$$

Mindkét oldalt beszorozva 13-mal, és kihasználva a feladat $x^2 + y^2 = 1$ feltételét:

$$2x + 3y \leq \sqrt{13}.$$

Egyenlőség is fennáll: a megfelelő x és y értékeket az $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ és az $x^2 + y^2 = 1$ összefüggésekből számolhatjuk ki. A kifejezésünk maximumértékére $\sqrt{13}$ adódik. A minimum értéke pedig az 1.1. szakasz alapján $-\sqrt{13}$.

1.8. Hogy jön ide egy paraméteres diszkrimináns?

Ebben a megoldásban (melynek ötlete a [11] könyvből származik) némiképpen átfoglalmazzuk az eredeti feladatot. A keresendő szélsőérték helyett bevezethetünk egy p paramétert: $p = 2x + 3y$. Ha ezzel foglalmazzuk meg a feladatot, akkor egy paraméteres egyenletrendszert kapunk, melyben az egyik egyenlet első-, míg a másik másodfokú. A legnagyobb és legkisebb p -t keressük úgy, hogy az egyenletrendszernek legyen megoldása. Előbb-utóbb egy diszkrimináns vizsgálatához érkezünk.

A feladat szövege alapján a p paraméternek azt a legnagyobb és legkisebb értékét keressük, hogy az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3y = p \end{cases} \quad (1.6)$$

egyenletrendszernek létezik megoldása. A továbbiakban csak a maximális p megtalálásával foglalkozunk. Ehhez a második egyenletből fejezzük ki az x -et: $x = \frac{p-3y}{2}$. Ezt visszaírva az első egyenletbe, y -ra nézve egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\left(\frac{p-3y}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$$

Alakítsuk át ezt a másodfokú kifejezést a megszokott alakra, hogy a megoldóképlet könnyen alkalmazható lehessen:

$$13y^2 - 6py + (p^2 - 4) = 0.$$

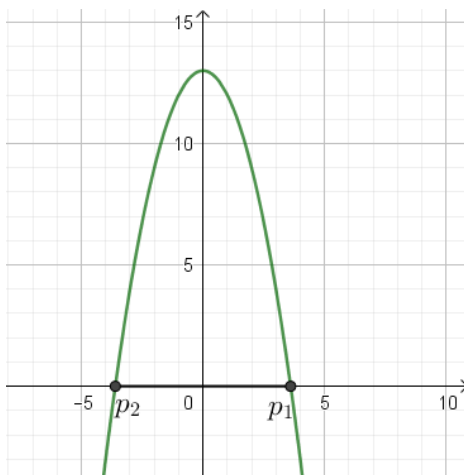
Ennek az egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz, ha igaz a

$$36p^2 - 52(p^2 - 4) \geq 0$$

összefüggés. A továbbiakban ennek az egyenlőtlenségnek keressük a legnagyobb megoldását p -re nézve. Ezt ismét a kanonikus másodfokú alakra hozzuk:

$$-p^2 + 13 \geq 0. \quad (1.7)$$

Ezt a másodfokú egyenlőtlenséget most grafikus módszerrel oldjuk meg. A bal oldalon szereplő p -től függő függvény grafikonja a főegyüttható negativitása miatt egy lefelé nyíló parabola, amely az 1.4. ábrán látható.



1.4. ábra. Grafikus módszer

Az egyenlőség megoldásai (a függvény zérushelyei) a $p_1 = \sqrt{13}$ és $p_2 = -\sqrt{13}$ számok, ezért a parabola a vízszintes tengelyt a p_1, p_2 helyeken metszi.

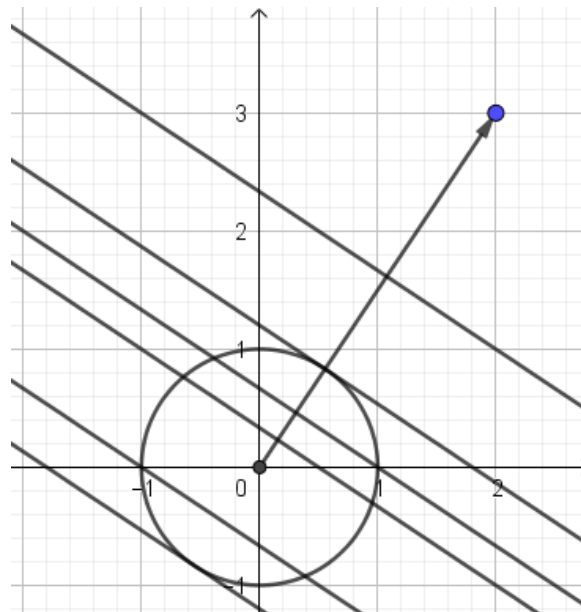
Az (1.7) egyenlőtlenség megoldásai azok a helyek, melyeknél a függvény értéke nemnegatív, tehát amikor a függvény grafikonja a vízszintes tengely fölött helyezkedik el, ami $p_2 \leq p \leq p_1$ esetben teljesül. Ezen megoldások közül a legnagyobb a $p = p_1 = \sqrt{13}$. Ezután az eredeti $2x + 3y$ kifejezésünk maximumhelyét megkapjuk, ha az (1.6) egyenletrendszert megoldjuk a $p = \sqrt{13}$ helyettesítéssel. Természetesen ezt végigszámolva ugyanaz adódik, mint az előző megoldási módszerekkel: a $2x + 3y$ kifejezésnek az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett a legnagyobb értéke $\sqrt{13}$, a legkisebb értéke $-\sqrt{13}$.

1.9. Az algebra találkozása a geometriával

Az előző szakaszban bevezetett

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3y = p \end{cases} \quad (1.8)$$

egyenletrendszert fölfoghatjuk úgy is, mint alakzatok egyenletei: egy köregyenlet és végtelen sok egymással párhuzamos egyenes (azaz egy egyenessereg) egyenlete. Azt a lehető legnagyobb és legkisebb p értéket keressük, hogy a hozzá tartozó egyenesnek és a körnek legyen közös pontja, más szóval a két alakzat egyenletéből álló egyenletrendszernek legyen megoldása.



1.5. ábra. Szemléltetés: a $(2; 3)$ vektorra merőleges egyenesek

A szóban forgó párhuzamos egyenesek egyik normálvektora a $(2; 3)$ vektor (lásd az 1.5 ábrát). Ezen egyenesek a p paramétertől függően az x tengelyt $x = \frac{p}{2}$ -ben metszik, így p növelésével az egyenesek a $(2; 3)$ vektor irányában „fölfelé” mozdulnak el. Világos, hogy a lehető legnagyobb p érték, amelyre az adott egyenesnek van közös pontja a körrel akkor adódik, amikor az egyenes éppen érinti a kört.

Tudjuk, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így most azt a sugarat keressük, amelyik párhuzamos az egyenes normálvektorával. Emiatt ennek a sugárnak a végpontja $(x; y) = (2\lambda; 3\lambda)$ alakú, tehát ezen koordináták kielégítik a körünk egyenletét:

$$(2\lambda)^2 + (3\lambda)^2 = 1. \quad (1.9)$$

Ezt megoldva adódik, hogy melyek lesznek az érintési pontok, amelyeken áthaladó egyenesek a legnagyobb és legkisebb p értéket szolgáltatják. Az (1.9) egyenlet megoldásai a $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{13}}$ számok, amelyek behelyettesítésével nyerjük, hogy $x_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}$ és $y_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}$, továbbá $x_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ és $y_2 = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. Ezeket az értékeket az (1.8) egyenletrendszer második egyenletébe behelyettesítve kapjuk, hogy $p_{\max} = 2x_1 + 3y_1 = \sqrt{13}$ és $p_{\min} = 2x_2 + 3y_2 = -\sqrt{13}$ a p paraméter lehetséges maximális és minimális értékei.

1.10. Bemutatkoznak a Lagrange-multiplikátorok

A következő megoldáshoz magasabb szintű analízist hívunk segítségül, mely éppen ahhoz ad iránymutatást, hogy ha egy megfelelő tulajdonságú kétváltozós $f(x; y)$ függvénynek a szélsőértékeit keressük valamilyen $F(x; y) = 0$ feltétel mellett, akkor milyen, f -re és F -re vonatkozó összefüggésekkel juthatunk el a szélsőérték-jelöltekhez. Lényegében megadunk egy módszert ilyen típusú feladatok megoldásához hasonlóan, mint ahogyan egyváltozós függvények szélsőérték-vizsgálatához is a deriválást bevezettük. Ehhez némi előkészületre van szükség: egy definícióval kezdjük.

1.11. Definíció. Legyen az f kétváltozós valós értékű függvény értelmezve az $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Továbbá legyen F kétváltozós valós értékű függvény, amely értelmezve van az $(a; b)$ pontban, és tegyük föl, hogy $F(a; b) = 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek *feltételes lokális minimuma van* az $(a; b)$ pontban az $F(a; b) = 0$ feltétel mellett, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x; y) \geq f(a; b)$ minden olyan $(x; y)$ -ra, amelyre igaz, hogy $|(x; y) - (a; b)| < \delta$ és $F(x; y) = 0$.

Ehhez hasonlóan, az f függvénynek *feltételes lokális maximuma van* az $(a; b)$ pontban az $F(a; b) = 0$ feltétel mellett, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x; y) \leq f(a; b)$ minden olyan $(x; y)$ -ra, amelyre igaz, hogy $|(x; y) - (a; b)| < \delta$ és $F(x; y) = 0$.

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek *feltételes lokális szélsőértéke van* az $(a; b)$ pontban az $F(a; b) = 0$ feltétel mellett, ha feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma van ebben a pontban.

A feltételes szélsőértékekkel kapcsolatban alapvető eredmény a következő.

1.12. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer). *Legyen F kétváltozós valós értékű függvény, amelyre $F(a; b) = 0$ és F folytonosan differenciálható $(a; b)$ -ben (azaz egy környezetben léteznek a parciális deriváltjai és ezek folytonosak $(a; b)$ -ben). Továbbá legyen f kétváltozós valós értékű függvény, amely folytonosan differenciálható az $(a; b)$ pontban. Ekkor ha az f függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az $(a; b)$ pontban az $F(a; b) = 0$ feltétel mellett, akkor vannak olyan λ és μ egyszerre nem nulla valós számok, hogy*

$$\begin{cases} \lambda \partial_1 f(a; b) + \mu \partial_1 F(a; b) = 0, \\ \lambda \partial_2 f(a; b) + \mu \partial_2 F(a; b) = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

azaz

$$\lambda \operatorname{grad} f + \mu \operatorname{grad} F = 0,$$

vagyis a $\operatorname{grad} f$ és a $\operatorname{grad} F$ gradiensvektorok párhuzamosak.

A tétel bizonyítása mélyebb eszközöket igényel, ezért most eltekintünk tőle. A részletek megtalálhatók a [6] könyvben.

Továbbá föl fogjuk használni az 1.1. Tétel többváltozós általánosítását is a feladatunk megoldásához, úgyhogy ezt is megfogalmazzuk (bizonyítás nélkül) mielőtt belevágunk a megoldás levezetésébe. (A bizonyítást lásd a [6] könyvben.)

1.13. Tétel (Weierstrass II. tételének általánosítása többváltozós függvényekre). *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ nem-üres, korlátos és zárt halmaz, és legyen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f korlátos az A halmazon, és az A -n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb érték.*

Alkalmazzuk először az 1.12. Tételt a feladatunk megoldásához. Legyen

$$F(x; y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Ekkor F értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, és a függvény ezen halmaz minden pontjában folytonosan differenciálható, hiszen kétváltozós polinom. A feladatunk szerint azon $(x; y)$ pontokkal foglalkozunk, melyekre igaz, hogy $x^2 + y^2 = 1$, azaz $F(x; y) = 0$. Tehát ezen $(x; y)$ pontokban is folytonosan differenciálható a függvényünk, ahogyan azt az 1.12. Tételünk megköveteli. Továbbá legyen

$$f(x; y) = 2x + 3y,$$

amely ugyancsak folytonosan differenciálható függvény, hiszen szintén kétváltozós polinom. A feladat szerint ennek keressük a feltételes szélsőértékeit az $F(x; y) = 0$ feltétel mellett. Mivel az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körvonal nemüres, korlátos és zárt halmaz, továbbá f folytonos függvény, ezért az 1.13. Tétel alapján léteznek a feltételes szélsőértékek, tehát az 1.12. Tétel szerint vannak olyan λ és μ egyszerre nem nulla valós számok, amelyek kielégítik az (1.10) egyenletrendszert. Mivel jelen esetben

$$\partial_1 f = 2, \quad \partial_1 F = 2x, \quad \partial_2 f = 3 \quad \text{és} \quad \partial_2 F = 2y,$$

ezért ha az $(x; y)$ pontban feltételes szélsőérték van, akkor a következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{cases} \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 2x = 0, \\ \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 2y = 0. \end{cases}$$

Ehhez célszerű hozzávennünk még az $F(x; y) = 0$ feltételt is:

$$\begin{cases} \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 2x = 0, \\ \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 2y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $\lambda \neq 0$, mert ha $\lambda = 0$ volna, akkor igaz lenne $\mu \cdot 2x = 0$ és $\mu \cdot 2y = 0$ is az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha a μ is egyenlő lenne 0-val, ami nem lehet a tétel alapján, mert λ és μ egyszerre nem nulla valós számok. Így bevezethetünk egy új jelölést:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \alpha,$$

amivel háromra csökkentettük az ismeretlenek számát. Az így kapott egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 2 + \alpha \cdot 2x = 0, \\ 3 + \alpha \cdot 2y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Fejezzük ki x -et és y -t α segítségével:

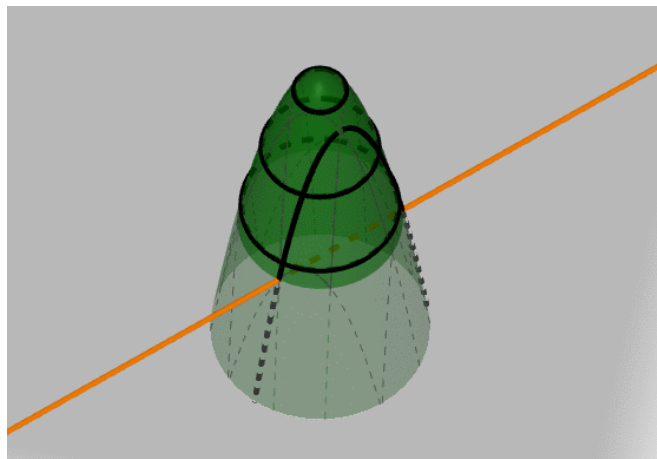
$$x = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{és} \quad y = -\frac{3}{2\alpha}.$$

Ezeket beírjuk a harmadik egyenletbe, és kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{9}{4\alpha^2} = 1.$$

Ezt átrendezve adódik, hogy $\mu^2 = \frac{13}{4}$, azaz $\mu = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$. Visszahelyettesítéssel nyerjük, hogy az f függvénynek feltételes lokális szélsőértékei vannak a $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ és a $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}; -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ pontokban. A feltételes maximum helye az előbbi pontban van, mert ott nagyobb az f értéke, míg az utóbbi a feltételes minimum helyét adja meg.

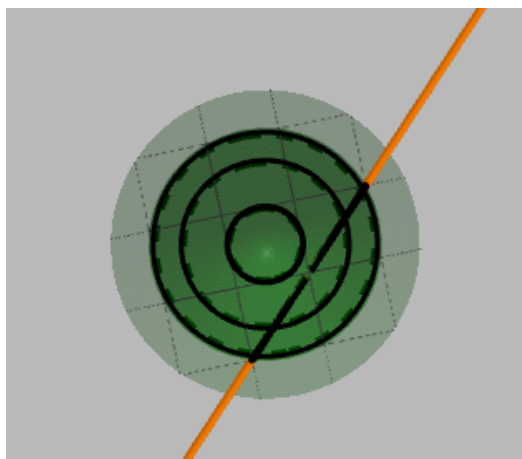
Kitekintés (Lagrange-multiplikátor módszer szemléletes jelentése). Az alábbiakban egy szemléletes képet adunk arról, hogy a valóságban mit is jelent az előbbieken tárgyalt Lagrange-féle multiplikátor módszer. Képzeljünk el egy domborzatot, amelynek a kezünkben van a térképe: például az 1.6. és az 1.7. ábrán egy hegy látható. A hegyen egy ösvény vezet, amelyet a térkép is mutat. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy az ösvényen haladva mikor vagyunk utunk során a legmagasabb, illetve a legalacsonyabb helyen. A térképen szintvonalakkal jelölik az azonos magasságú helyeket, de természetesen a térkép nem ábrázol minden szintvonalat, azonban tudjuk, hogy minden ponton áthalad szintvonal valahogyan. Ha utunk egy szintvonalon át vezet, akkor abban a pontban biztosan nem lehetünk sem legmagasabban, sem legalacsonyabban, mert a szintvonal keresztezésekor vagy fölfelé haladunk, vagy lefelé haladunk éppen. Azaz vagy van magasabb, vagy van alacsonyabb pont utunk során. Ebből szemléletesen következik, hogy csak ott lehetünk szélső helyzetben, ahol szintvonalat érint az utunk.



1.6. ábra. Hegyünk az úttal és a magassági körökkel

Ez pontosan azt jelenti, hogy az utunknak és a szintvonalnak közös érintője van, ami ekvivalens azzal, hogy utunk görbét meghatározó F függvény gradiense és a szintvonalat meghatározó f függvény gradiense egymással párhuzamosak. Éppen ezt használjuk ki, mikor a Lagrange-multiplikátorokat bevezetjük.

Ezt az okoskodást az előző feladaton is szemléltethetjük: a „dombunk” az $f(x; y) = 2x + 3y$ függvény grafikonja, a térképen látjuk az ösvény vetületét az xy síkra, ami pedig az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör. Eszerint valójában a „domb”, amelyen sétálunk egy sík, és az utunk valódi alakja egy ellipszis. A síkunk szintvonalai a $2x + 3y = p$ egyenletű síkok $f(x; y)$ síkkal vett metszetének a merőleges vetületei az xy



1.7. ábra. Hegyünk felülnézetből; ezt látjuk a térképen

síkra (ezek egyenesek). A feladat kérdése pedig éppen az, hogy melyik ezen egyenesek közül az, amelyik érinti az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kört.

2. fejezet

Maximumkeresés harmadfokon

A második feladatban egy harmadfokú kifejezés maximumát keressük. Kézenfekvő lenne deriválással nekilátni, de a feladat kitűzői differenciálszámítás nélküli, elemi okoskodásra kíváncsiak. Négyféle megoldást fogunk bemutatni, melyeket nemcsak konkrétan erre a kifejezésre lehet alkalmazni, hanem harmadfokú kifejezések igen széles körére. Ebben a fejezetben is használjuk majd a nevezetes közepek közti összefüggéseket, de előkerül a Bernoulli-egyenlőtlenség és a végén még a Cardano-formula is. Az eredeti feladat, amely a Középiskolai Matematika Lapok B. 3467. számú feladványa volt 2001 májusában, a következőképpen szól.

2. Feladat. Keressük meg az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximumát a pozitív számok körében a differenciálszámítás alkalmazása nélkül.

2.1. Előzetes megfontolások

A feladatban szereplő $x(1+x)(3-x)$ kifejezés értéke az $x > 0$ feltétel mellett lehet pozitív és nempozitív is. Valóban, mivel $x > 0$ esetén $x(1+x) > 0$, ezért az $x(1+x)(3-x)$ szorzat értéke pozitív, ha $0 < x < 3$, és negatív, ha $x > 3$. Mi a kifejezés maximumára vagyunk kíváncsiak, amely tehát egy pozitív szám kell, hogy legyen, ha egyáltalán létezik. Ezért a maximumot elegendő a $0 < x < 3$ feltétel mellett keresnünk.

Első lépésként érdemes átgondolni, hogy az a maximum, amelyet keresünk, valóban létezik. Vegyük észre, hogy az $f(x) = x(1+x)(3-x)$ függvény folytonos a valós számok halmazán, hiszen polinom. A $(0; 3)$ intervallumon nem alkalmazhatjuk az 1.1. Tételt a maximum létezésének garantálására, mert bár a $(0; 3)$ intervallum nemüres és korlátos, azonban nem zárt. Ezért változtassunk kicsit a feladaton. Ha a $[0; 3]$ intervallumon keresnénk a maximumot, akkor biztosan mondhatnánk, hogy az létezik, mert az 1.1. Tétel minden feltétele teljesül. Ebben az esetben könnyen látjuk, hogy a maximum nem az intervallum végpontjaiban van, hiszen $f(0) = f(3) = 0$, és ha $0 < x < 3$, akkor $f(x) > 0$, ezért a maximum valamely belső pontban vétetik föl. Ebből következően az f függvénynek valóban van maximuma a $(0; 3)$ nyílt intervallumon.

2.2. Ismét közepek a láthatáron

Mint szélsőérték-feladatok kapcsán oly gyakran, első ötletként megint a nevezetes közepek juthatnak eszünkbe, ám az $x(1+x)(3-x)$ szorzat tényezőinek számából adódóan most két tagú helyett három

tagú közepekkel fogunk célhoz érni.

A két tagra megfogalmazott 1.5. Tételt általánosíthatjuk több tagra is.

2.1. Tétel (Számítási és mértani közepek közti egyenlőtlenség n tagra). *Bármely $a_1, \dots, a_n$ nemnegatív valós számok esetén igaz, hogy*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Mivel a feladatmegoldáshoz a 2.1. Tétel $n = 3$ -ra vonatkozó esetét fogjuk felhasználni, ezért erre mutatunk egy ötletes bizonyítást, amely Augustin Louis Cauchy nevéhez fűződik.

Bizonyítás. A bizonyítás alapgondolata a következő. Az $n = 2$ tagra vonatkozó esetet már beláttuk az 1.5. Tétel bizonyításakor. Ezt felhasználva fogunk következtetni arra az esetre, amikor $n = 4$, s ebből fogjuk megkapni még egy lépéssel később az $n = 3$ -as eset igazságát. A bizonyításban az egyszerűség kedvéért a_1, a_2, a_3, a_4 helyett a, b, c, d jelölésre térünk át.

Az $n = 4$ esetén fennálló összefüggéshez írjuk föl az $\frac{a+b}{2}$ és $\frac{c+d}{2}$ számokra a két tagra vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}}. \quad (2.1)$$

A bal oldalon megjelent az a, b, c, d számok számtani közepe:

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

A (2.1) egyenlőtlenség jobb oldalán pedig a négyzetgyökjelen belüli tényezőkre ismét alkalmazzuk a két tagra bizonyított összefüggést, azaz

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}. \quad (2.2)$$

Ezért ha a (2.1) és a (2.2) egyenlőtlenséget összevetjük, akkor éppen a kívánt összefüggést nyerjük:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Az egyenlőséghez szükséges és elégséges, hogy a (2.1) és a (2.2) egyenlőtlenségben egyenlőség álljon, ami az $n = 2$ -es eset alapján az $a+b = c+d$, $a = b$ és $c = d$ feltételeket jelenti, ahonnan $a = b = c = d$ adódik.

A három tagra vonatkozó összefüggést ebből úgy kapjuk meg, hogy az a, b, c és $\frac{a+b+c}{3}$ számokra alkalmazzuk a négy tagra belátott egyenlőtlenséget. Ekkor első lépésben az alábbi összefüggést nyerjük:

$$\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}}. \quad (2.3)$$

Ennek bal oldalán az a, b, c számok számtani közepe áll, hiszen

$$\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{a+b+c}{4} + \frac{a+b+c}{12} = \frac{4a+4b+4c}{12} = \frac{a+b+c}{3}.$$

A (2.3) egyenlőtlenség jobb oldalán lévő gyökvonást pedig a gyökvonás azonosságai szerint a következőképpen is írhatjuk:

$$\sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}} = \sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{\frac{a+b+c}{3}}.$$

A (2.3) egyenlőtlenség a két oldalának átalakítása után a következő alakot ölti:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Ennek mindkét oldalát negyedik hatványra emelve (ez ekvivalens átalakítás, mert a , b és c nemnegatív számok), majd az $\frac{a+b+c}{3}$ kifejezéssel osztva a következő adódik:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc.$$

(Ha $\frac{a+b+c}{3} = 0$, azaz $a = b = c = 0$, akkor nem oszthatunk az $\frac{a+b+c}{3}$ kifejezéssel, de az iménti egyenlőtlenség ebben az esetben is nyilván igaz.) A három tagra bizonyítandó összefüggést megkapjuk, ha köbgyököt vonunk mindkét oldalból:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, amikor a (2.3) egyenlőtlenségben, vagyis ha $a = b = c = \frac{a+b+c}{3}$, azaz $a = b = c$. $\square$

A 2.1. Tétel segítségével, annak is az $n = 3$ tagra vonatkozó esetével fogunk nekilátni a 2. feladatnak. Nem vagyunk könnyű helyzetben, mert ha az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés szorzótényezőinek számtani, illetve mértani közepét vesszük, abból még nem tudunk következtetni a 2.1. Tétel alapján a maximumra. Nézzük ugyanis, mi történne, ha $a_1 = x$, $a_2 = 1 + x$ és $a_3 = 3 - x$ szereposztással alkalmaznánk a 2.1. Tételt:

$$\frac{x + 1 + x + 3 - x}{3} \geq \sqrt[3]{x(1+x)(3-x)},$$

ami átalakítva:

$$\frac{x+4}{3} \geq \sqrt[3]{x(1+x)(3-x)}.$$

Egyenlőség akkor teljesülne, ha $x = 1 + x = 3 - x$, de ilyen x nincs. Másrészt a felső korlátként adódott $\frac{x+4}{3}$ kifejezés továbbra is függ x -től. Ez azt jelenti, hogy ebből az egyenlőtlenségből a jobb oldal maximumára vonatkozóan nem vonhatunk le következtetést. Hogy mégis célba érjünk, néhány trükkös ötletet is be kell vetnünk. Vajon milyen tagokat érdemes használnunk a közepek egyenlőtlenségében, és azokat milyen együtthatókkal? Erre mutatunk most egy lehetséges megoldást, és a következő szakaszban egy másikat.

Vezessük be az $y = x - b$ új változót, ahol a b valós számot úgy határozzuk meg, hogy

$$x(1+x)(3-x) = y(a-y^2) + K \quad (2.4)$$

teljesüljön valamely a és K valós számok esetén. Más szóval az új változóval adódó kifejezésben ne szerepeljen másodfokú tag. Az egyenlő együtthatók módszerével könnyedén megkaphatjuk az a , b és K konkrét értékeit, amelyek mellett igaz a fenti egyenlőség. Ehhez alakítsuk át a (2.4) egyenlet jobb oldalát:

$$y(a-y^2)+K = ay-y^3+K = ax-ab-(x^3-3bx^2+3xb^2-b^3)+K = -x^3+3bx^2+x(a-3b^2)+(b^3-ab+K).$$

Ezen kívül a (2.4) egyenlet bal oldalán végezzük el a szorzást:

$$x(1+x)(3-x) = -x^3 + 2x^2 + 3x.$$

A két oldalnak meg kell egyeznie, tehát a két oldalon a megfelelő együtthatóknak egyenlőnek kell lennie, azaz az x^2 együtthatóira igaz, hogy $3b = 2$. Ebből következik, hogy $b = \frac{2}{3}$. Továbbá x együtthatói a két oldalon: $-3b^2 + a = 3$, amiből a már ismert b érték alapján $a = \frac{13}{3}$ adódik. Valamint a konstans tagok is megegyeznek, vagyis $b^3 - ab + K = 0$, amiből a és b értéke alapján kiszámolható a $K = -\frac{70}{27}$ érték is. Tehát az eredeti kifejezésünk így is írható:

$$x(1+x)(3-x) = y \left(\frac{13}{3} - y^2 \right) - \frac{70}{27}. \quad (2.5)$$

A továbbiakban ennek a maximumát keressük. Fontos leszögeznünk, hogy milyen y értékeket engedhetünk meg. Eredetileg a $0 < x < 3$ intervallumon kerestük a szélsőértéket. Tudjuk, hogy $y = x - \frac{2}{3}$, ebből y -ra a $-\frac{2}{3} < y < \frac{7}{3}$ értékek adódnak. Az $y \leq 0$ esetet kizárhatjuk, hiszen ekkor (2.5) jobb oldala nem pozitív, márpedig a 2.1. szakaszban megállapítottuk, hogy (2.5) bal oldalának maximuma pozitív, amennyiben létezik. Továbbá kizárhatjuk a $\sqrt{\frac{13}{3}} \leq y < \frac{7}{3}$ értékeket is, hiszen ekkor a (2.5) egyenlet jobb oldalán szereplő zárójelben egy negatív kifejezés állna, és így a kifejezés nem lehet maximális, mert a $0 < y < \sqrt{\frac{13}{3}}$ intervallumban lévő y értékek esetén ebben a zárójelben egy pozitív szám szerepel. Tehát a maximumhely-keresést a $0 < y < \sqrt{\frac{13}{3}}$ intervallum y értékei között elegendő végeznünk.

A maximumhely-keresés szempontjából a (2.5) egyenlet jobb oldalán szereplő konstans taggal nem kell foglalkoznunk. A konstans nélküli szorzat helyett pedig a négyzetének kétszeresét fogjuk vizsgálni. Ezen két kifejezés maximumértéke más lesz nyilvánvalóan, de a maximumhelyeik meg fognak egyezni, mert a $0 < y < \sqrt{\frac{13}{3}}$ intervallumban az $y \left(\frac{13}{3} - y^2 \right)$ kifejezés értéke pozitív.

A fentiek alapján foglalkozzunk mostantól az $y^2 \left(\frac{13}{3} - y^2 \right)^2$ kifejezéssel, ahol $0 < y < \sqrt{\frac{13}{3}}$. A számtani és mértani közepek közti összefüggést az $a_1 = 2y^2$ és $a_2 = a_3 = \frac{13}{3} - y^2$ számokra írjuk föl:

$$\frac{2y^2 + \left(\frac{13}{3} - y^2 \right) + \left(\frac{13}{3} - y^2 \right)}{3} \geq \sqrt[3]{2y^2 \left(\frac{13}{3} - y^2 \right)^2}. \quad (2.6)$$

Ez a felírás azért szerencsés, mert a bal oldalon kiesnek az y -tól függő tagok, így egy konkrét szám marad, míg a jobb oldalon éppen a kérdéses kifejezésünk köbgyöke jelent meg, amelynek a maximumhelyét keressük. Ezzel megkaptuk a vizsgált szorzat egyik felső korlátját. A számtani és mértani közepek közti összefüggés alapján pedig tudjuk, hogy csak akkor teljesül egyenlőség a (2.6) egyenlőtlenségben, ha

$$2y^2 = \frac{13}{3} - y^2.$$

Vagyis eszerint az

$$y = \frac{\sqrt{13}}{3} \quad (2.7)$$

helyen veszi fel a maximumértékét az $y \left(\frac{13}{3} - y^2 \right)$ kifejezés (is). Ez a maximumérték pedig

$$\frac{\sqrt{13}}{3} \left(\frac{13}{3} - \frac{13}{9} \right) = \frac{26}{27} \sqrt{13}.$$

Ehhez az értékhez még hozzá kell adnunk a (2.5) egyenletből a maximumhely-keresés közben elhanyagolt konstans tagot, vagyis az eredeti $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximumértéke: $\frac{26}{27} \sqrt{13} + \frac{70}{27}$, amit az $x = y + b = \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{2}{3}$ helyen vesz fel.

2.3. UV trükk

Az előző megoldáshoz hasonlóan most is a számtani és mértani közepek közti összefüggést fogjuk alkalmazni szintén három tagra. Viszont a megfelelő tagok megtalálásához most még furfangosabb út fog vezetni. Az ötlet az eredeti KöMaL feladat 2001 novemberében közölt hivatalos megoldásaiból származik.

Hívjuk segítségül az $x(1+x)(3-x)$ kifejezésünk (2.5) egyenletbeli felírását a bevezetett y változóval, s a konstans tagtól megint tekintsünk el a maximumkeresés alatt. A továbbiakban tehát az $y(\frac{13}{3} - y^2)$ kifejezéssel foglalkozunk, amelynek a maximumát a $0 < y < \sqrt{\frac{13}{3}}$ intervallumon keressük. A négyzetek különbségére vonatkozó ismert azonosság alapján

$$y \left(\frac{13}{3} - y^2 \right) = y \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right).$$

Tekintsük ezt a háromtényezős szorzatot. Ennek a tényezői vajon alkalmasak lesznek-e arra, hogy a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségével helyes következtetést tudjunk levonni a maximumhellyel kapcsolatban? Ehhez szükséges lenne, hogy a számtani közepük egy y -tól nem függő szám legyen. Ennek a három tagnak a számtani közepe sajnos függ y -tól, viszont be tudunk vezetni olyan együtthatót vagy együtthatókat, hogy megfelelő legyen a számtani közép, azaz ne függjön y -tól. Az

$$y + \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) + \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right)$$

kifejezésben (ami a kérdéses számtani közép számlálója) két y van pozitív előjellel, és egy negatív előjellel. Ha azt a tagot, amelyikben $(-y)$ szerepel, 2-vel megszorozzuk, akkor ez az új kifejezés már nem fog y -tól függni. Igen ám, de ez még nem elégséges ahhoz, hogy ennek segítségével tudjunk a maximumra következtetni. Ugyanis ez esetben a számtani és mértani közepek közti összefüggés ezt mondja ki:

$$\sqrt[3]{y \cdot 2 \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right)} \leq \frac{y + 2 \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) + \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right)}{3},$$

és az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $y = 2 \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) = \sqrt{\frac{13}{3}} + y$. Jelen esetben azonban egyenlőség sosem áll fenn, hiszen nincsen olyan y , amelyre igaz lenne az, hogy $y = \sqrt{\frac{13}{3}} + y$.

Következő ötletünk (ami végül célravezető is lesz), hogy két taghoz is bevezetünk u és v pozitív valós együtthatókat. Az u együtthatóval az y tagot látjuk el, míg a v együtthatóval a $\sqrt{\frac{13}{3}} - y$ tagot úgy, hogy a vizsgált számtani középből kiessenek az y -t tartalmazó tagok, azaz az

$$\frac{uy + v \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) + \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right)}{3} = \frac{(u - v + 1)y + \sqrt{\frac{13}{3}}(v + 1)}{3}$$

kifejezés ne függjön y -tól. Ekkor igaz kell legyen az, hogy az y -os tag együtthatója 0, vagyis

$$u - v + 1 = 0.$$

Ez alapján $v = u + 1$ a kapcsolat a bevezetett együtthatók között.

Írjuk föl most is a számtani és mértani közepek közötti összefüggést a megfelelő együtthatókkal ellátott tagokra:

$$\sqrt[3]{uy \cdot v \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right)} \leq \frac{uy + v \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) + \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right)}{3} = \frac{\sqrt{\frac{13}{3}}v + \sqrt{\frac{13}{3}}}{3},$$

és az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$uy = v \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) = \sqrt{\frac{13}{3}} + y. \quad (2.8)$$

Pontosan akkor fogjuk megkapni a kérdéses $y \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) \left(\sqrt{\frac{13}{3}} + y \right)$ kifejezés maximumát, amikor a (2.8) egyenlőség fennáll, úgyhogy keressük meg ehhez a megfelelő u , v és y értékeket. A v helyére behelyettesítjük az $(u+1)$ -et, s így a (2.8) két egyenlőségében csak két ismeretlen fog szerepelni. Az első

$$uy = v \left(\sqrt{\frac{13}{3}} - y \right) = \sqrt{\frac{13}{3}}u + \sqrt{\frac{13}{3}} - uy - y$$

egyenletből y -t kifejezhetjük:

$$y = \frac{\sqrt{\frac{13}{3}}(u+1)}{2u+1}. \quad (2.9)$$

(Ezt az átrendezést biztosan megtehettük, ugyanis nem lehet 0 a nevezőben, mert u -t pozitív valós számként vezettük be, azaz nem lehet az értéke $-\frac{1}{2}$.) Hasonlóan, a második

$$uy = \sqrt{\frac{13}{3}} + y \quad (2.10)$$

egyenletből is kifejezzük y -t:

$$y = \frac{\sqrt{\frac{13}{3}}}{u-1}. \quad (2.11)$$

(Feltehető, hogy $u \neq 1$, mert az $u = 1$ esetben a (2.10) egyenlőségből nem kapnánk y -ra megoldást.) Tehát (2.9) és (2.11) alapján fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\frac{\sqrt{\frac{13}{3}}(u+1)}{2u+1} = \frac{\sqrt{\frac{13}{3}}}{u-1}.$$

Ezt az egyenletet ekvivalens módon átalakítva az

$$u^2 - 2u - 2 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek pozitív megoldása csak az $u = 1 + \sqrt{3}$. Ebből az u értékből a $v = 2 + \sqrt{3}$ és $y = \frac{\sqrt{\frac{13}{3}}}{u-1} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ értékek adódnak.

Megkaptuk ugyanazt az y értéket, amelyik az előző szakaszban is adódott (lásd a (2.7) összefüggést): az $y(\frac{13}{3} - y^2)$ kifejezés ezen y érték mellett lesz maximális. Innentől ugyanúgy jutunk el az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximumának értékéhez, mint az előző 2.2. szakaszban.

2.2. Megjegyzés. A 2.2. és a 2.3. szakaszban tárgyalt megoldási utak alkalmazhatóak bármely c pozitív valós számhoz tartozó $cx - x^3$ kifejezés pozitív x -eken vett maximumhelyének (vagy $x^3 - cx$ kifejezés negatív x -eken vett minimumhelyének) meghatározására. Ennél viszont gyorsabb, ha egyszerűen visszavezetjük a kérdést a már megoldott feladatra. Ehhez vezessük be az $y = \lambda x$ jelölést, ahol a λ pozitív paramétert később választjuk meg. Ekkor az alábbi alakra módosul a köbös kifejezésünk:

$$cx - x^3 = \frac{c}{\lambda}y - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^3 = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda^2cy - y^3).$$

Ha ezt a feladatban megoldott esetre akarjuk visszavezetni, akkor a $\lambda^2c = \frac{13}{3}$ választás célszerű, s ebből kapjuk, hogy $\lambda = \sqrt{\frac{13}{3c}}$ lesz a megfelelő paraméter. Ekkor

$$cx - x^3 = \frac{1}{\lambda^3}y \left(\frac{13}{3} - y^2 \right),$$

ahonnan a maximum értéke $y \left(\frac{13}{3} - y^2 \right)$ maximumából könnyen adódik.

2.4. Ismerkedjünk Bernoullival!

A következő megoldáshoz a Jakob Benoulli svájci matematikusról elnevezett egyenlőtlenséget fogjuk használni (ennek ötlete a [8] előadásból származik). A Bernoulli-egyenlőtlenség legelterjedtebb bizonyítása teljes indukcióval történik, ezért mi most egy kevésbé ismert gondolatmenetet fogunk ismertetni, mely a mértani sorozat összegképletét használja. Ez a bizonyítás a [12] cikkben olvasható.

2.3. Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Ha $x \geq -1$ valós szám és n tetszőleges pozitív egész szám, akkor igaz, hogy*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $n = 1$ vagy $x = 0$.

Bizonyítás. Vegyük azt a számsorozatot, amelynek minden tagja 1, azaz $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots$. Ez tekinthető egy olyan számtani sorozatnak, amelynek differenciája $d = 0$, vagy olyan mértani sorozatnak, amelynek a hányadosa $q = 1$. Ezen sorozat első n tagjának összege n .

Változtassunk most ezen a sorozaton úgy, hogy mértani sorozat maradjon, $a_1 = 1$ legyen továbbra is, de a hányadosa legyen $q = 1 + x$, ahol az x pozitív valós szám. Ekkor a tagokat a_2 -től kezdve növeltük, emiatt, ha legalább két tag van, akkor az első n tag összege is több lesz, mint az eredeti esetben. Most az első n tag összegére $q \neq 1$ miatt az

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

összegképletet fogjuk használni. Ebbe a $q = 1 + x$ és az $a_1 = 1$ értékeket behelyettesítve az

$$s_n = 1 \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

összefüggést kapjuk. S mivel ez $n > 1$ esetén nagyobb, mint az eredeti sorozatunk első n tagjának összege, ezért igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} > n.$$

Ezt átrendezve éppen a Bernoulli-egyenlőtlenséget (ráadásul szigorú egyenlőtlenséggel) kapjuk arra az esetre, ha $x > 0$ és $n > 1$.

Ha az eredeti sorozaton úgy változtatunk, hogy mértani sorozat maradjon, $a_1 = 1$ legyen továbbra is, de a hányadosa $q = 1 + x$ legyen, ahol az x -re $-1 \leq x < 0$ teljesül, akkor a mértani sorozatunk most szigorúan csökkenő lesz (kivéve az $x = -1$ esetet, amikor a második tagtól kezdve minden tag 0), úgyhogy ezen sorozat első n tagjának összege $n > 1$ esetén kisebb az eredeti összegnél. Tehát az előzőhöz hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} < n.$$

Ha ezt helyesen átrendezzük, azaz figyelünk arra, hogy az x -szel való szorzáskor megfordul a relációs jel (mert $x < 0$), akkor megkapjuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget (ráadásul ismét szigorú egyenlőtlenséggel) arra az esetre, ha $-1 < x < 0$ és $n > 1$.

Az előbbieken tehát beláttuk, hogy ha $n > 1$ és $x \neq 0$, akkor szigorú egyenlőtlenséggel teljesül a tétel egyenlőtlensége. Már csak az van hátra, hogy az $x = 0$ és $n = 1$ esetekben igazoljuk, hogy egyenlőség áll fenn. Az $x = 0$ esetben a bal és a jobb oldal is 1-gyel egyenlő, azaz valóban fennáll az egyenlőség. Az $n = 1$ esetben mindkét oldal $(1+x)$ -szel egyenlő, tehát ekkor is teljesül az egyenlőség. Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

A 2. feladat megoldásához egy olyan segédtelet fogunk segítségül hívni, amely az iménti 2.3. Tétel $n = 3$ -ra vonatkozó speciális esetének a következménye.

2.4. Tétel. *Bármely $x \geq 0$ valós számra igaz, hogy*

$$x^3 - 3x \geq -2.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 1$.

Bizonyítás. A bizonyításhoz használjuk fel az alábbi észrevételt:

$$x^3 = [1 + (x - 1)]^3.$$

Azért szerencsés számunkra ez az alak, mert ha $x - 1 \geq -1$, azaz $x \geq 0$, akkor alkalmazható rá a 2.3. Tételnek az $n = 3$ -ra vonatkozó esete. Ekkor az alábbi összefüggést nyerjük:

$$x^3 = [1 + (x - 1)]^3 \geq 1 + 3(x - 1) = 3x - 2.$$

Ezt átrendezve a bizonyítandó egyenlőtlenséget nyerjük. Egyenlőség pedig nyilvánvalóan akkor áll fenn, amikor a 2.3. Tétel esetében, vagyis pontosan akkor, amikor $x - 1 = 0$, azaz $x = 1$. $\square$

A 2.4. Tételt célszerű egy új z változóval felírunk, hogy ne keverjük össze az eredeti maximalizálandó kifejezésünkben lévő x -szel. Ekkor bármely $z \geq 0$ valós számra igaz, hogy $z^3 - 3z \geq -2$, amit (-1) -gyel való beszorzás után így is írhatunk:

$$3z - z^3 \leq 2.$$

A következő ötlet az, hogy szorozzuk be mindkét oldalt c^3 -bel, ahol c valamilyen pozitív valós szám. Ekkor az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

$$3c^2(cz) - (cz)^3 \leq 2c^3. \quad (2.12)$$

Ez az átalakítás onnan juthat eszünkbe, hogy felidézzük a (2.5) egyenletet, melyben a maximalizálandó kifejezés hasonló alakban szerepel, amit az y -nal (ahol $y = x - \frac{2}{3}$) való beszorzás után a következő alakban is írhatunk:

$$x(1+x)(3-x) = \frac{13}{3}y - y^3 - \frac{70}{27}.$$

Ebben az összefüggésben a 2.2. szakaszban tárgyaltak miatt $0 < y < \sqrt{\frac{13}{3}}$. Ha most a (2.12) egyenlőtlenségben $3c^2 = \frac{13}{3}$ (azaz $c = \frac{\sqrt{13}}{3}$) és $cz = y$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{13}{3}y - y^3 - \frac{70}{27} \leq 2c^3 - \frac{70}{27} = 2 \left(\frac{\sqrt{13}}{3} \right)^3 - \frac{70}{27} = \frac{26\sqrt{13} - 70}{27}.$$

Egyenlőség pedig a 2.4. Tétel szerint pontosan akkor áll fenn, ha $z = 1$. A z és c értékéből tudunk következtetni y -ra: $y = cz = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Tehát az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximuma a pozitív számokon $\frac{26\sqrt{13}-70}{27}$, amit az $x_{\max} = y + b = \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{2}{3}$ helyen vesz fel.

2.5. Kilyukadunk a Cardano-formulánál

A 2.1. szakaszban már tisztáztuk, hogy létezik az $x(1+x)(3-x)$ kifejezésnek maximuma a pozitív valós számok halmazán. Az alábbi megoldásban ezt felhasználva a következőképpen fogunk okoskodni: ha az $x(1+x)(3-x)$ kifejezést egyenlővé tesszük a maximális értékkel, akkor a kapott egyenlet gyökeiről le tudunk vonni néhány hasznos következtetést. Ezután az egyenlő együtthatók módszerével egy háromismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk, melyből ezek az imént említett gyökök és a maximum értéke meghatározható.

Tegyük fel, hogy a kifejezésünknek a pozitív számok halmazán a legnagyobb értéke M . Ekkor igaz minden $x > 0$ esetén, hogy

$$-x^3 + 2x^2 + 3x \leq M, \quad (2.13)$$

továbbá valamilyen $x = \alpha > 0$ számra

$$\alpha(1+\alpha)(3-\alpha) = -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha = M.$$

Ez utóbbi azt jelenti, hogy az

$$x^3 - 2x^2 - 3x + M = 0$$

egyenletnek $x = \alpha$ megoldása, ezért a bal oldalán kiemelhető az $(x - \alpha)$ gyöktényező, amelyet egy másodfokú kifejezéssel kell megszoroznunk, hogy visszakapjuk az eredeti harmadfokút:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + M = (x - \alpha)(x^2 + ax + b).$$

A (2.13) egyenlőtlenség miatt tudjuk, hogy a kapott szorzat csak nemnegatív lehet $x > \alpha$ és $0 < x < \alpha$ esetén is. Nézzük meg, hogy ebben a két esetben milyen előjelű kell legyen a másodfokú kifejezés, hogy teljesüljön a szorzat nemnegativitása. Ha $x < \alpha$, akkor $x - \alpha < 0$, vagyis szükségképpen $x^2 + ax + b \leq 0$, viszont ha $x > \alpha$, akkor $x - \alpha > 0$, tehát akkor $x^2 + ax + b \geq 0$ szükséges. Levonhatjuk a következtetést: az α -ban a másodfokú kifejezésünk előjelet vált, vagyis annak is gyöke az α . A gondolatmenet alapján α tehát kétszeres gyöke a harmadfokú kifejezésnek, vagyis a következőt írhatjuk:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + M = (x - \alpha)^2(x - \beta).$$

A zárójelet felbontva adódik:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + M = (x - \alpha)^2(x - \beta) = x^3 + x^2(-2\alpha - \beta) + x(\alpha^2 + 2\alpha\beta) - \beta\alpha^2.$$

A felbontás után a két oldalon az x -hatványok együtthatóinak meg kell egyezniük, tehát az α , β és M számok szükségképpen kielégítik az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 2, \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = -3, \\ -\beta\alpha^2 = M. \end{cases}$$

Az első két egyenletből nyerjük, hogy $\alpha_1 = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ és $\alpha_2 = \frac{2-\sqrt{13}}{3}$. Mivel $\alpha_2 < 0$, ezért ez nem jön szóba, mint maximumhely. Tehát egyértelműen megkaptuk, hogy a kifejezésünk $\alpha = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ -ban veszi fel a maximumát. Ebből adódik, hogy

$$M = \alpha(1+\alpha)(3-\alpha) = \frac{26\sqrt{13} + 70}{27}.$$

2.5. *Megjegyzés.* Belátható, hogy minden harmadfokú egyenlet megfelelő helyettesítéssel

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2.14)$$

alakra hozható, ahogyan azt mi is tettük a 2.2. szakaszban, amikor a másodfokú tagot az $y = x + b$ helyettesítéssel kiküszöböltük az $x(1+x)(3-x)$ kifejezésből. A (2.14) alakú harmadfokú egyenletek megoldásához jól ismert egy képlet, mely megadja a gyököket. Ez a képlet Gerolamo Cardano nevéhez fűződik, és így fest:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

(Itt a köbgyököket úgy kell választani, hogy a szorzatuk $-\frac{p}{3}$ legyen. Ekkor a harmadfokú egyenlet összes megoldását megkapjuk a komplex számok körében.) Az is ismert, hogy a

$$D = -108 \left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right)$$

kifejezés, amelyet a harmadfokú egyenlet diszkriminánsának szokás nevezni, az előjele alapján információt ad a gyökökről hasonlóan, mint ahogyan a másodfokú egyenletek esetén a diszkrimináns. Ugyanis, ha $p \neq 0$, $q \neq 0$ esetén $D = 0$, akkor (és csak akkor) az egyenletnek van egy kétszeres és egy egyszeres valós gyöke. Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek három különböző valós gyöke van. Harmadik esetben, ha $D < 0$, akkor az egyenletnek egy valós és két komplex gyöke van (utóbbiak egymás konjugáltjai). Ezen állítások közül csak a következőt fogjuk belátni, és felhasználni a megoldásunk során.

2.6. Tétel. *Ha az $x^3 + px + q$ valós együtthatós polinomnak van kétszeres valós gyöke, akkor fennáll a*

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy α kétszeres valós gyöke a szóban forgó polinomnak. Ekkor az $(x - \alpha)^2$ tényező kiemelhető a polinomból:

$$x^3 + px + q = (x - \alpha)^2(x + \beta).$$

Bontsuk fel az egyenlet jobb oldalán lévő zárójeleket:

$$x^3 + px + q = x^3 + x^2(-2\alpha - \beta) + x(\alpha^2 + 2\alpha\beta) - \beta\alpha^2.$$

Az egyenlő együtthatók módszere szerint a két oldalon a megfelelő x -hatványok együtthatói megegyeznek, vagyis fennáll a

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0, \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = p, \\ -\beta\alpha^2 = q \end{cases}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből β kifejezhető α segítségével: $\beta = -2\alpha$. Ezt felhasználva a második egyenletből meghatározható p , a harmadikból pedig q az α segítségével:

$$p = \alpha^2 - 2\alpha \cdot 2\alpha = -3\alpha^2, \quad q = -2\alpha \cdot \alpha^2 = -2\alpha^3.$$

Helyettesítsük be a p -re és q -ra kapott összefüggéseket a $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ kifejezésbe:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \alpha^6 - \alpha^6 = 0.$$

Ezzel beláttuk a tétel állítását. □

A 2.5. szakaszban rájöttünk, hogy α kétszeres gyöke az $x(1+x)(3-x)$ kifejezésnek, ezért a 2.6. Tétel szerint ebből bátran következtethetünk arra, hogy

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

ami a mi esetünkben megfelel az alábbi összefüggésnek:

$$\left(\frac{M - \frac{70}{27}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{13}{9}\right)^3 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$M_1 = \frac{70}{27} + \frac{26}{27}\sqrt{13} \quad \text{és} \quad M_2 = \frac{70}{27} - \frac{26}{27}\sqrt{13}.$$

Ezek közül a maximum értéke az M_1 , mert az pozitív.

3. fejezet

Melyik forgáskúp IQ-ja a legnagyobb?

A következő feladatban testek felszíne és térfogata közti kapcsolatot fogjuk vizsgálni. Mi most speciálisan forgáskúpokkal fogunk foglalkozni. A megoldások során segítségül fogjuk hívni ismét a nevezetes közepeket, a deriválást, a diszkriminánsvizsgálatot, és az utolsó megoldásban arra is fény derül, mit értünk egy test IQ-ján, azaz izoperimetrikus hányadosán. A feladat, amely a [4] tankönyvben jelent meg, így szól.

3. Feladat. Az egyenlő térfogatú egyenes körkúpok között melyiknek a felszíne a legkisebb?

3.1. Általános vs. speciális

A feladat egy speciális (vagy legalábbis első látásra annak tűnő) esetét a Középiskolai Matematikai Lapokban is kitűzték B. 3669. jelzéssel:

Módosított kérdés. Egységnyi térfogatú forgáskúpok közül melyiknek minimális a felszíne?

Világos, hogy az egységnyi térfogatú kúpokról szóló iménti kérdés az egyik speciális esete a 3. feladatnak, tehát nyilvánvalóan ezzel is készen leszünk, ha általánosan megoldjuk a feladatot adott $V > 0$ térfogat mellett. Most azonban fordítva is hasonló a helyzet, azaz ha a $V = 1$ speciális esetben meg tudjuk mondani, hogy mekkora a minimális felszín, akkor abból tetszőleges V térfogat esetén egyértelműen tudunk következtetni a minimális felszínre a V függvényében. Nézzük ezt meg pontosabban!

Ehhez először elevenítsük fel a forgáskúpok térfogatára (V) és felszínére (A) vonatkozó ismereteinket. Jól ismert, hogy a forgáskúpok térfogatát az alábbi képlettel lehet kiszámolni:

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3}, \quad (3.1)$$

ahol r -rel jelöljük az alapkör sugarát, m -mel pedig a forgáskúp magasságát. A forgáskúpok felszínét pedig az

$$A = r^2 \pi + r a \pi \quad (3.2)$$

összefüggés adja meg, ahol az a a kúp alkotóját jelöli.

Tegyük fel, hogy ismerjük az egységnyi térfogatú forgáskúpok közötti minimális felszínűt, és annak felszíne α . Ez azt jelenti, hogy

$$A = r^2 \pi + r a \pi \geq \alpha, \quad (3.3)$$

amiben egyenlőség is teljesül, és még esetleg azt is tudjuk, hogy milyen összefüggés kell fennálljon a kúp alapkörének sugara, magassága és alkotója között, hogy $A = \alpha$ legyen (vagyis a felszín éppen

ekkor minimális). Tekintsünk most egy V térfogatú forgáskúpot, amelynek felszíne legyen $\hat{A}$, alapkörének sugara $\hat{r}$, magassága $\hat{m}$ és alkotója pedig $\hat{a}$. Ekkor a V térfogatú kúpot megfelelő hasonlósági transzformációval egységnyi térfogatú kúpba vihetjük át. Ha a hasonlóság aránya λ , akkor $r = \lambda\hat{r}$, $m = \lambda\hat{m}$ és $a = \lambda\hat{a}$, így

$$1 = \frac{r^2\pi m}{3} = \lambda^3 \frac{\hat{r}^2\pi\hat{m}}{3} = \lambda^3 V.$$

Ebből a λ értékét kifejezve megkapjuk a hasonlóság arányát a V függvényében:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{V}}.$$

Írjuk most föl a kapcsolatot r és $\hat{r}$, valamint m és $\hat{m}$, továbbá a és $\hat{a}$ között a kapott λ segítségével:

$$r = \lambda\hat{r} = \frac{\hat{r}}{\sqrt[3]{V}}, \quad m = \lambda\hat{m} = \frac{\hat{m}}{\sqrt[3]{V}} \quad \text{és} \quad a = \lambda\hat{a} = \frac{\hat{a}}{\sqrt[3]{V}}. \quad (3.4)$$

Helyettesítsük be az imént nyert összefüggéseket a (3.3) egyenlőtlenségbe:

$$r^2\pi + ra\pi = \frac{\hat{r}^2\pi}{\sqrt[3]{V^2}} + \frac{\hat{r}\hat{a}\pi}{\sqrt[3]{V^2}} \geq \alpha. \quad (3.5)$$

Itt $\frac{1}{\sqrt[3]{V^2}}$ -et kiemelve az $\hat{A}$ jelenik meg:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{V^2}}(\hat{r}^2\pi + \hat{r}\hat{a}\pi) = \frac{1}{\sqrt[3]{V^2}}\hat{A} \geq \alpha.$$

Ezt átrendezve az eredeti V térfogattól függő alsó becslést nyerünk az $\hat{A}$ felszínre:

$$\hat{A} \geq \alpha\sqrt[3]{V^2}.$$

Ebben az egyenlőtlenségben pontosan akkor teljesül egyenlőség, amikor a (3.5) egyenlőtlenségben. Ez a (3.4) összefüggés alapján azt jelenti, hogy ha az egységnyi térfogatú kúpok között $r_{\min}$, $m_{\min}$ és $a_{\min}$ szolgáltatja a minimumot, akkor a V térfogatúak között $\sqrt[3]{V}r_{\min}$, $\sqrt[3]{V}m_{\min}$ és $\sqrt[3]{V}a_{\min}$, továbbá a minimális felszín értéke $\alpha \cdot \sqrt[3]{V^2}$. A későbbiekben ezekre az észrevételekre többször is hivatkozni fogunk.

Az előbbiek alapján a számolások egyszerűsítése érdekében a megoldások során több esetben egységnyi térfogattal fogunk számolni, hogy megkapjuk az α értéket, majd ebből következtetünk a minimális felszínre, ha a térfogat nem egységnyi, hanem V nagyságú.

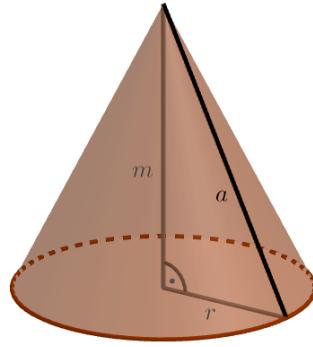
3.2. Diszkriminánsra találva

Használjuk a 3.1. szakaszban bevezetett r , m és a jelöléseket, ahol r a forgáskúp alapkörének sugarát, m a magasságát és a pedig az alkotóját jelöli (és ezek mind pozitív számok). Ekkor a kúp felszínét és térfogatát a (3.1) és a (3.2) képletek adják meg. A Pitagorasz-tételből adódik, hogy az r , az m és az a között fennáll a következő összefüggés (lásd a 3.1. ábrát):

$$r^2 + m^2 = a^2. \quad (3.6)$$

A 3.1. szakasz alapján először egységnyi térfogatú kúppal foglalkozunk, ezért most feltesszük, hogy $V = \frac{r^2\pi m}{3} = 1$. Ebből az r^2 könnyen kifejezhető:

$$r^2 = \frac{3}{m\pi}.$$



3.1. ábra. Forgáskúp sugara, magassága, alkotója

Ekkor a Pitagorasz-tételből az a -ra kapott, m -től függő összefüggésünk a következő alakot ölti:

$$a = \sqrt{\frac{3}{m\pi} + m^2}.$$

Ezeket helyettesítsük be a felszínképletbe:

$$A = \frac{3}{m\pi}\pi + \sqrt{\frac{3}{m\pi}}\pi\sqrt{\frac{3}{m\pi} + m^2}. \quad (3.7)$$

Egyszerűsítés és átrendezés után kapjuk, hogy

$$A - \frac{3}{m} = \sqrt{\frac{3}{m\pi}}\pi\sqrt{\frac{3}{m\pi} + m^2}. \quad (3.8)$$

Ahhoz, hogy ez az egyenlet teljesüljön, szükséges, hogy a bal oldal nemnegatív legyen:

$$A \geq \frac{3}{m}. \quad (3.9)$$

Ekkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, úgyhogy ezzel a lépéssel folytatjuk a (3.8) egyenlet rendezését:

$$A^2 - \frac{6A}{m} + \frac{9}{m^2} = \frac{3\pi}{m} \left(\frac{3}{m\pi} + m^2 \right).$$

A zárójelfelbontás után a $\frac{9}{m^2}$ tag kiesik, és m -mel való beszorzás után egy paraméteres másodfokú egyenletet kapunk m -re nézve:

$$0 = 3\pi m^2 - A^2 m + 6A. \quad (3.10)$$

Ennek pontosan akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz fennáll, hogy

$$A^4 - 72A\pi \geq 0.$$

Mivel $A > 0$, ezért lehet egyszerűsíteni A -val, így egy hiányos harmadfokú egyenlőtlenséget kapunk, melyet átrendezve alsó becslés adódik A -ra:

$$A \geq \sqrt[3]{72\pi}. \quad (3.11)$$

Az egyenlőség feltétele, hogy a (3.10) másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa 0, azaz pontosan egy megoldása van m -re nézve, mégpedig

$$m = \frac{A^2}{6\pi} = \frac{(\sqrt[3]{72\pi})^2}{6\pi} = \sqrt[3]{\frac{72^2\pi^2}{6^3\pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}},$$

amit megoldóképlet alapján könnyen megkapunk. A kapott $m = 2\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ és $A = \sqrt[3]{72\pi}$ értékekre teljesül a (3.9) feltétel, tehát ezek a (3.7) egyenletnek is megoldásai. Most r^2 -be visszaírva m -et:

$$r^2 = \frac{3}{m\pi} = \frac{3}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3^3\pi}{3\pi^3}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}}.$$

Ebből r gyökvonással kapható:

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}.$$

Az a értéke pedig:

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{24}{\pi}\right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}} \left(\sqrt[3]{8^2} + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \frac{3}{\sqrt{2}} = 3r.$$

Vagyis annak az egységnyi térfogatú forgáskúpnek a legkisebb a felszíne, amelyiknek az alkotója háromszorosa az alapkör sugarának. Ennek a minimális felszínnek az értéke pedig $A = \sqrt[3]{72\pi}$. A 3.1. szakaszban leírtak alapján azt mondhatjuk, hogy ha nem egységnyi a forgáskúp térfogata, hanem V , akkor a felszínére az alábbi összefüggés áll fenn:

$$A \geq \sqrt[3]{72\pi V^2},$$

amelyben az egyenlőség

$$\hat{r} = \sqrt[3]{V} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}, \quad \hat{a} = \sqrt[3]{V} \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \quad \text{és} \quad \hat{m} = 2\sqrt[3]{V} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

esetben teljesül, azaz ismét $\hat{a} = 3\hat{r}$. Vagyis a V térfogatú forgáskúpok között is az a legkisebb felszínű, amelyiknek alkotója éppen háromszor akkora, mint az alapkör sugara. A minimális felszín értéke pedig $A = \sqrt[3]{72\pi V^2}$.

3.3. Deriválni még ezt is lehet

Először ismét egységnyi térfogatú kúpok között vizsgálódunk, vagyis legyen $V = 1$. Ekkor a (3.1), a (3.2) és a (3.6) összefüggések alapján a felszín értékét ki tudjuk fejezni az r függvényében. Ugyanis

$$m = \frac{3}{r^2\pi},$$

ezért

$$a = \sqrt{r^2 + \frac{9}{r^4\pi^2}},$$

és ebből következően

$$A(r) = r^2\pi + r\pi\sqrt{r^2 + \frac{9}{r^4\pi^2}},$$

ami átalakítható az alábbi alakra:

$$A(r) = r^2\pi + \sqrt{r^4\pi^2 + \frac{9}{r^2}}. \quad (3.12)$$

Ez az $A(r)$ függvény akkor van értelmezve, ha $r > 0$ valós szám, és ekkor $A(r)$ folytonos függvény, sőt, differenciálható. A differenciálhatóság miatt a szélsőértékeket a deriváltból és a monotonitási tulajdonságokból is kikövetkeztethetnénk. Ám kissé elegánsabb, ha először megvizsgáljuk, hogy valóban létezik

minimum, és ekkor már a monotonitással nem kell foglalkozni, hanem elég csupán a szélsőértékhely-jelölteket megkeresni, és összehasonlítani az ottani függvényértékeket. Vizsgáljuk meg, hogy hol érdemes keresni az $A(r)$ függvény minimumát! Világos, hogy az $r \rightarrow 0+$ esetben $A(r) \rightarrow \infty$, továbbá $r \rightarrow \infty$ esetén is $A(r) \rightarrow \infty$. Tehát van olyan $0 < r_1 < 1 < r_2$, hogy az $[r_1; r_2]$ intervallumon kívül $A(r) \geq A(1)$. Az $[r_1; r_2]$ intervallumon az 1.1. Tétel miatt van minimum (amely legfeljebb $A(1)$), és ez a $(0; \infty)$ -en is minimum lesz, hiszen $[r_1; r_2]$ -n kívül $A(r)$ minden értéke legalább $A(1)$. A $(0; \infty)$ intervallum nyíltsága miatt a minimumhely lokális minimumhely is egyúttal, ezért ott a derivált 0-val egyenlő. Elég tehát a derivált zérushelyeit megkeresni, mert ezek lesznek $A(r)$ szélsőértékhely-jelöltjei. Deriváljuk tehát r szerint az $A(r)$ függvényt, és keressük meg a deriváltfüggvény zérushelyeit:

$$A'(r) = 2r\pi + \frac{4r^3\pi^2 - \frac{18}{r^3}}{2\sqrt{r^4\pi^2 + \frac{9}{r^2}}} = 0.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$2r\pi \left(2\sqrt{r^4\pi^2 + \frac{9}{r^2}} \right) = \frac{18}{r^3} - 4\pi^2 r^3.$$

Vegyük mindkét oldal négyzetét, ami nem ekvivalens átalakítás, de most nem törődünk vele, mert a végén úgysí kiszűrjük a hamis szélsőértékhely-jelölteket. A négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$16r^2\pi^2 \left(r^4\pi^2 + \frac{9}{r^2} \right) = \frac{324}{r^6} - \frac{144\pi^2 r^3}{r^3} + 16\pi^4 r^6,$$

ami tovább egyszerűsödik, mert a jobb oldal második tagjából eltűnik az r^3 , és a $16\pi^4 r^6$ tag pedig kiesik az egyenletből:

$$144\pi^2 = \frac{324}{r^6} - 144\pi^2.$$

Ebből az r könnyen kifejezhető:

$$r = \sqrt[6]{\frac{324}{288\pi^2}} = \sqrt[6]{\frac{9}{8\pi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}.$$

Mivel ez az egyetlen jelöltünk a minimumhelyre, ezért megállapíthatjuk, hogy a leírtak alapján minimális lesz az $A(r)$ értéke a kapott $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ helyen. Ekkor a minimális felszín a (3.12) összefüggésből adódik, ha behelyettesítjük r értékét: $A = \sqrt[3]{72\pi}$. Ha nem egységnyi térfogatú, hanem V térfogatú a forgáskúpunk, akkor a minimális felszínre kapott érték a 3.1. szakasz alapján az $A = \sqrt[3]{72\pi V^2}$ összefüggésre módosul.

3.1. Megjegyzés. A megoldásban az $A(r)$ függvény előzetes vizsgálatokor valójában a következő hasznos állítást is beláttuk.

3.2. Állítás. *Ha $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre*

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

akkor f -nek van minimuma.

3.4. Ismét feltűnnek a közepek

Ahogy ezt már az előző két fejezetben is többször illusztráltuk, egyenlőtlenségekkel kapcsolatos feladatok megoldásai között gyakran felbukkannak a nevezetes közepek. Ahhoz, hogy ezeket most is használni tudjuk, a felszínre vonatkozó (3.7) összefüggésből fogunk kiindulni, amely az egységnyi térfogatú forgáskúp felszínét a magasságának függvényében adja meg:

$$A(m) = \frac{3}{m} + \pi \sqrt{\frac{3}{m\pi}} \sqrt{\frac{3}{m\pi} + m^2} = \frac{3}{m} + \sqrt{\frac{9}{m^2} + 3m\pi}. \quad (3.13)$$

Annak érdekében, hogy a minimális felszínt megtaláljuk, először a jobb oldalon szereplő négyzetgyökös kifejezést fogjuk alulról becsülni. Az ötlet az, hogy írjuk föl a 2.1. Tételt $n = 9$ darab tagra az $a_1 = \frac{9}{m^2}$ és $a_2 = \dots = a_9 = \frac{3m\pi}{8}$ szereposztásban:

$$\frac{\frac{9}{m^2} + \overbrace{\frac{3m\pi}{8} + \dots + \frac{3m\pi}{8}}^{8 \text{ db}}}{9} \geq \sqrt[9]{\frac{9}{m^2} \left(\frac{3m\pi}{8}\right)^8}.$$

Ha vesszük az egyenlőtlenség mindkét oldalának a négyzetgyökét (ezt a négyzetgyökvonást bátran megtehetjük, mert m pozitív valós szám, mivel hosszúságot fejez ki), továbbá mindkét oldalt megszorozzuk 3-mal, akkor a bal oldalon éppen az a becsülendő négyzetgyökös kifejezés fog állni, amelyik a (3.13) egyenletben is megjelent:

$$\sqrt{\frac{9}{m^2} + 3m\pi} = 3 \sqrt{\frac{\frac{9}{m^2} + \overbrace{\frac{3m\pi}{8} + \dots + \frac{3m\pi}{8}}^{8 \text{ db}}}{9}} \geq 3 \sqrt[18]{\frac{9}{m^2} \left(\frac{3m\pi}{8}\right)^8}. \quad (3.14)$$

Kicsit szebb alakra hozzuk a (3.14) egyenlőtlenség jobb oldalát:

$$3 \sqrt[18]{\frac{9}{m^2} \left(\frac{3m\pi}{8}\right)^8} = 3 \sqrt[9]{\frac{3^5 m^3 \pi^4}{8^4}} = 3 \sqrt[3]{m} \sqrt[9]{\frac{3^5 \pi^4}{8^4}}.$$

Egyenlőség a 2.1. Tétel alapján pontosan akkor áll fenn, ha

$$\frac{9}{m^2} = \frac{3m\pi}{8},$$

azaz ha $m^3 = \frac{24}{\pi}$.

Eddig tehát azt kaptuk, hogy

$$A(m) \geq \frac{3}{m} + 3 \sqrt[3]{m} \sqrt[9]{\frac{3^5 \pi^4}{8^4}}, \quad (3.15)$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $m^3 = \frac{24}{\pi}$.

Ezek után ismét használjuk a 2.1. Tételt, csak most az $n = 4$ -es esetre, és legyen a szereposztás $a_1 = \frac{3}{m}$ és $a_2 = a_3 = a_4 = \sqrt[9]{\frac{\pi^4 3^5}{8^4}} \sqrt[3]{m}$. Ekkor:

$$\frac{3}{m} + 3 \sqrt[9]{\frac{\pi^4 3^5}{8^4}} \sqrt[3]{m} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{3}{m} \left(\sqrt[3]{m} \sqrt[9]{\frac{\pi^4 3^5}{8^4}} \right)^3}. \quad (3.16)$$

Azért volt szerencsés ezt a felírást használni, mert észrevehető, hogy a (3.16) egyenlőtlenség bal oldalán éppen a (3.15) egyenlőtlenség jobb oldala jelent meg. Ekkor a (3.15) és a (3.16) egyenlőtlenségek alapján azt kapjuk, hogy

$$A(m) \geq 4 \sqrt[4]{\frac{3}{m} \left(\sqrt[3]{m} \sqrt[9]{\frac{\pi^4 3^5}{8^4}} \right)^3} = \sqrt[3]{72\pi}.$$

Fontos még ellenőriznünk azt, hogy a felszín fölveszi-e a $\sqrt[3]{72\pi}$ értéket mint minimumát. Amikor a (3.16) egyenlőtlenségben írtuk föl a számtani és mértani közepek közti összefüggést, akkor abban az egyenlőség pontosan akkor állt fenn, ha

$$\frac{3}{m} = \sqrt[9]{\frac{\pi^4 3^5}{8^4}} \sqrt[3]{m},$$

azaz ebből is éppen az $m^3 = \frac{24}{\pi}$ összefüggés adódik. Tehát az

$$A(m) \geq \sqrt[3]{72\pi}$$

egyenlőtlenségben pontosan $m = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}}$ esetén áll fenn egyenlőség. Ha nem egységnyi térfogatú kúpokkal, hanem V térfogatú kúpokkal foglalkozunk, akkor a minimális felszín értéke a 3.1. szakasz szerint $\sqrt[3]{72\pi V^2}$ -re módosul.

3.5. Négyzetes középpel furfangosan

Újfent a (3.13) összefüggést fogjuk az egységnyi térfogatú kúpok felszínének minimumkeresésére használni. Sőt, még osszuk el az egyenletet 3-mal, és a továbbiakban az $\frac{A(m)}{3}$ kifejezést vizsgáljuk, mert ez ugyanakkor lesz minimális, mint $A(m)$:

$$\frac{A(m)}{3} = \frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{m\pi}{3}}.$$

Először a négyzetgyökös kifejezésre adunk alsó becslést, méghozzá oly módon, hogy felhasználjuk az 1.6. Tétel szerinti kapcsolatot a számtani és a négyzetes közepek között. Olyan tagokat keresünk, melyeknek négyzetes közepe (vagy annak valahányszorososa) éppen a gyökös kifejezésünk. Ennek megfelelőek az $a_1 = \frac{1}{m}$ és az $a_2 = \dots = a_9 = \sqrt{\frac{m\pi}{24}}$ számok. Ezek négyzetes közepének háromszorosát felírva látható, hogy az valóban a gyökös kifejezésünk:

$$3 \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 8 \left(\sqrt{\frac{m\pi}{24}}\right)^2}{9}} = \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{m\pi}{3}}. \quad (3.17)$$

Az 1.6. Tétel miatt a tagok négyzetes közepe nagyobb vagy egyenlő a számtani közepükénél, azaz fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$3 \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 8 \left(\sqrt{\frac{m\pi}{24}}\right)^2}{9}} \geq 3 \frac{\frac{1}{m} + 8 \sqrt{\frac{m\pi}{24}}}{9}, \quad (3.18)$$

és azt is tudjuk, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{3}{m} = \sqrt{\frac{3m\pi}{8}}, \quad \text{azaz} \quad m^3 = \frac{24}{\pi}.$$

A fenti (3.17) és (3.18) összefüggések alapján $\frac{A(m)}{3}$ értékét alulról tudjuk becsülni a következőképpen:

$$\frac{A(m)}{3} \geq \frac{1}{m} + 3 \frac{\frac{1}{m} + 8\sqrt{\frac{m\pi}{24}}}{9} = \frac{4}{3m} + \frac{8}{3}\sqrt{\frac{m\pi}{24}} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{m} + 2\sqrt{\frac{m\pi}{24}} \right).$$

A kapott alsó becslést tovább becsülhetjük alulról (célunk, hogy egy m -től független alsó becslést nyerjünk), méghozzá úgy, hogy felismerjük benne az $a_1 = \frac{1}{m}$ és $a_2 = a_3 = \sqrt{\frac{m\pi}{24}}$ számok számtani közepének a négyszeresét. Ezt a 2.1. Tétel $n = 3$ -as esete alapján a tagok mértani közepével becsüljük alulról:

$$4 \frac{\frac{1}{m} + 2\sqrt{\frac{m\pi}{24}}}{3} \geq 4 \sqrt[3]{\frac{1}{m} \frac{m\pi}{24}}, \quad (3.19)$$

ahol a jobb oldalon az m jól látható módon kiesik, és egy konstans értéket kapunk eredményül:

$$\frac{A(m)}{3} \geq 4 \sqrt[3]{\frac{\pi}{24}}.$$

Ez alapján $A(m)$ -ről azt mondhatjuk, hogy

$$A(m) \geq \sqrt[3]{72\pi}.$$

Még le kell ellenőriznünk, hogy a (3.19) összefüggésben ugyanakkor áll-e fenn az egyenlőség, mint amikor a (3.18) egyenlőtlenségben. A (3.19) összefüggésben pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha

$$\frac{1}{m} = \sqrt{\frac{m\pi}{24}}, \quad \text{azaz} \quad m^3 = \frac{24}{\pi}.$$

Tehát a fenti levezetésben mindkét nevezetes közepek közti egyenlőtlenségben ugyanabban az esetben áll fenn az egyenlőség, ezért az egységnyi térfogatú forgáskúpok között az

$$A = \sqrt[3]{72\pi}$$

felszínű forgáskúpnak minimális a felszíne. Ekkor a 3.1. szakaszban leírtak alapján adódik, hogy a V térfogatú forgáskúpok között az $A = \sqrt[3]{72\pi V^2}$ felszínű a minimális.

3.6. Fordítsuk ki a kérdést!

Fordítsuk ki a 3. feladat kérdését:

„Kifordított kérdés”. Adott felszínű forgáskúpok közül vajon melyiknek maximális a térfogata?

A továbbiakban először ezzel a kérdéssel foglalkozunk, majd ebből következtetünk az eredeti kérdésre, és az is kiderül, hogy a „kifordított kérdés” miért maximumról szól.

Tekintsük az $A > 0$ felszínű forgáskúpokat. A $V = \frac{r^2\pi m}{3}$ térfogat akkor maximális (ha egyáltalán van maximum), amikor az r^2m szorzat maximális. E szorzat helyett a négyzetével fogunk foglalkozni, r^4m^2 -tel, mert ennek is ugyanott van a maximuma (ha van). Mivel a kúp felszíne adott, ezért az m^2 -et célszerű kifejezni A -val. Ehhez először a kúp alkotóját írjuk fel a (3.2) képletből:

$$a = \frac{A}{r\pi} - r.$$

Ezután a kúp magasságának négyzetét fejezzük ki a sugár és az alkotó segítségével a Pitagorasz-tétel szerint:

$$m^2 = a^2 - r^2 = \left(\frac{A}{r\pi} - r\right)^2 - r^2.$$

A továbbiakban tehát keressük azt az r -et, amelyre az

$$f(r) = r^4 m^2 = r^4 \left(\left(\frac{A}{r\pi} - r \right)^2 - r^2 \right) \quad (3.20)$$

függvény maximális értékű. Ez a függvény $r > 0$ számokon van értelmezve, mert az r hosszúságot fejez ki. Az előbbiek alapján az $f(r)$ függvény a forgáskúp térfogatával a következő kapcsolatban áll:

$$V(r) = \frac{\pi}{3} \sqrt{f(r)}. \quad (3.21)$$

Jól látszódik, hogy $V(r)$ -nek és $f(r)$ -nek ugyanott lesz maximális az értéke. Jelenleg mi az $f(r)$ maximumával fogunk foglalkozni, s ebből következtetünk majd $V(r)$ maximumára. A (3.20) egyenletben szereplő $f(r)$ kifejezésében végezzük el a négyzetre emelést és a beszorzást:

$$f(r) = r^4 \left(\frac{A^2}{r^2\pi^2} - \frac{2A}{\pi} \right) = -\frac{2A}{\pi} \left(r^4 - \frac{A}{2\pi} r^2 \right).$$

Most alakítsunk ezt teljes négyzetté:

$$f(r) = -\frac{2A}{\pi} \left(\left(r^2 - \frac{A}{4\pi} \right)^2 - \frac{A^2}{16\pi^2} \right) = -\frac{2A}{\pi} \left(r^2 - \frac{A}{4\pi} \right)^2 + \frac{A^3}{8\pi^3}.$$

Ebben az alakban jól látszódik, hogy az $f(r)$ függvény pontosan akkor lesz maximális, ha

$$-\frac{2A}{\pi} \left(r^2 - \frac{A}{4\pi} \right)^2 = 0,$$

tehát ha

$$r^2 - \frac{A}{4\pi} = 0.$$

Az utóbbiból az r^2 -et kifejezve kapjuk, hogy $r^2 = \frac{A}{4\pi}$. Ebbe visszaírva az $A = r\pi(r + a)$ összefüggést:

$$r^2 = \frac{r\pi(r + a)}{4\pi},$$

amiből $3r = a$. Vagyis az adott A felszínű kúpok között annak a legnagyobb a térfogata, amelyiknek az alkotója az alapkör sugarának a háromszorosával egyenlő. Ekkor a maximális térfogat megadható a (3.21) összefüggés alapján:

$$V_{max} = \frac{\pi}{3} \sqrt{f(r)} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{A^3}{8\pi^3}} = \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}}.$$

Az eredeti feladatunk viszont nem ennek a kérdésnek a megválaszolása volt. Az előző levezetésből vajon hogyan tudunk következtetni az azonos térfogatú kúpok között a minimális felszínűre? Azt kaptuk, hogy ha A adott, akkor

$$V \leq \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}}, \quad (3.22)$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $3r = a$. Most fordítsuk vissza a kérdést: ha a V adott, akkor mi mondható el az A -ról? Rendezzük át a (3.22) egyenlőtlenséget úgy, hogy A -ra kapjunk egy alsó korlátot V függvényében:

$$\sqrt[3]{72\pi V^2} \leq A,$$

és az egyenlőség ugyanakkor áll fenn, mikor a (3.22) egyenlőtlenségben, azaz ha $3r = a$. Tehát a minimális felszín éppen $A = \sqrt[3]{72\pi V^2}$.

3.7. Testek IQ versenye

A fejezet címében a legnagyobb IQ-jú forgáskúp szerepel, de eddig erről még egy szót sem szoltunk. Most erről is lehull a lepel.

Minden test esetén definiálható az úgynevezett izoperimetrikus hányados (izoperimetrikus kvóciens) az alábbi módon:

$$\Theta = 36\pi \frac{V^2}{A^3},$$

ahol V a test térfogata, A pedig a felszíne. Ezt angolul isoperimetric quotientnek, vagy röviden csak IQ-nak nevezik. Például egy V térfogatú, A felszínű gömbnek az IQ-ja

$$36\pi \frac{V^2}{A^3} = 36\pi \frac{\frac{16}{9}r^6\pi^2}{64r^6\pi^3} = 1,$$

ezért is szokás a 36π -s szorzót belevenni a definícióba. Vegyük észre, hogy Θ értéke hasonlóságra nézve invariáns. Ennek belátásához tegyük fel, hogy két test hasonlósági aránya λ . Ekkor a két térfogat között $V_1 = \lambda^3 V_2$, a felszínek között $A_1 = \lambda^2 A_2$ összefüggés áll fenn, így

$$\frac{(V_1)^2}{(A_1)^3} = \frac{\lambda^6 (V_2)^2}{\lambda^6 (A_2)^3} = \frac{(V_2)^2}{(A_2)^3},$$

amiből az izoperimetrikus hányadosok egyenlősége következik.

Észrevehetjük, hogy a 3. feladatban valójában arra kerestük a választ, hogy melyik forgáskúpnak a lehető legnagyobb az IQ-ja, és mennyi az? Hiszen a $\sqrt[3]{72\pi V^2} \leq A$ összefüggés könnyen átalakítható a következő alakra:

$$\frac{1}{72\pi} \geq \frac{V^2}{A^3},$$

amelynek mindkét oldalát 36π -vel beszorozva az IQ-ra kapunk felső becslést:

$$\frac{1}{2} \geq 36\pi \frac{V^2}{A^3}.$$

Vagyis éppen az a forgáskúp, amelyet a 3. feladatban kerestünk, a legnagyobb IQ-jú, és ennek IQ-ja pontosan 0,5.

A legnagyobb IQ-jú forgáskúp mintájára meghatározható például a legnagyobb IQ-jú kettős kúp, vagy hasáb is. Belátható, hogy a legnagyobb IQ-jú kettős kúp izoperimetrikus hányadosa $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ és a legnagyobb IQ-jú hasábé pedig $\frac{2}{3}$, aminek tulajdonosa éppen a kör alapú, azaz a henger. Felmerül továbbá, hogy a szabályos poliédereknek mennyi az IQ-juk? Ezeket az értékeket tartalmazza a 3.1. táblázat, amely a [9] könyvből származik. A táblázatban megjelenő τ -val az aranymetszés irracionális arányszámát jelöltük: $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Test	Izoperimetrikus hányados	Közelítő érték
Gömb	1	1,0000
Ikozaéder	$\frac{\pi \tau^4}{15\sqrt{3}}$	0,8288
Kettős kúp	$\leq \frac{4}{3\sqrt{3}}$	$\leq 0,7698$
Dodekaéder	$\frac{\pi \tau^{\frac{7}{2}}}{3 \cdot 5^{\frac{5}{4}}}$	0,7547
Hasáb	$\leq \frac{2}{3}$	$\leq 0,6667$
Oktaéder	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	0,6045
Kocka	$\frac{\pi}{6}$	0,5236
Kúp	$\leq \frac{1}{2}$	$\leq 0,5000$
Tetraéder	$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$	0,3023

3.1. táblázat. Izoperimetrikus hányadosok ($\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

4. fejezet

Módszertani kitekintés

4.1. Kerettantervi környezet

Fölmerülhet a kérdés, hogy van-e idő és motiváció arra, hogy a dolgozatban bemutatott szélsőérték-feladatok és ezekhez hasonló példák előkerüljenek a középiskolában. Ennek megválaszolására megvizsgáltuk, hogy az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet honlapján elérhető Kerettanterv milyen lehetőségeket nyújt 9–12. osztályos tanulók számára a szélsőérték-feladatokkal és nevezetes egyenlőtlenségekkel való foglalkozásra.

Az alaptanterven belül a diákok 9–10. osztályban megismerik két pozitív szám számtani és mértani közepe közti összefüggést, továbbá foglalkoznak elsőfokú és másodfokú egyenlőtlenségekkel, valamint olyan szöveges feladatokkal, amelyek ilyen típusú egyenlőtlenségekre vezethetők vissza. A tanulók a 11–12. osztályban tovább mélyítik az első- és másodfokú egyenlőtlenségek megoldási lehetőségeivel és eszközeivel kapcsolatos ismereteiket (feladatokat oldanak meg például grafikus módszerrel, valamint az értelmezési tartomány vizsgálatával). A szélsőérték-feladatoknak ezeknél részletesebb tárgyalása az óraszámra nem fér bele.

Viszont a kétféle emelt matematika óraszámú kerettanterv közül az A típusú részletesebben foglalkozik a dolgozatunk témakörével. 9–10. osztályban az elsőfokú és másodfokú egyenlőtlenségek mellett már előkerülnek a számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közepek és a köztük fennálló egyenlőtlenségek két tagra vonatkozó bizonyításokkal. A későbbiekben pedig, a 11–12. osztályban 15 tanórát szán a Kerettanterv a *Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása* című témára. Ezen belül foglalkoznak nevezetes közepekkel (a többváltozós alak bizonyítása is terítékre kerül), szélsőértékre utaló függvénytulajdonságokkal, és előkerülnek a Bernoulliról, a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz hármáról és a Jensenről elnevezett egyenlőtlenségek is (utóbbi bizonyítás nélkül, míg az első kettő bizonyítással). A későbbiekben pedig a *Folytonosság, differenciálszámítás* című témakör keretén belül (amelyre 30 órát szán a Kerettanterv) megismerkednek a differenciálszámítás eszköztárával, és annak segítségével gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatokat is megoldanak.

A következőkben bemutatok egy általam átgondolt tematikus tervet arra, hogyan lehet a Kerettanterv szerint meghatározott 15 órát megtartani a *Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása* témakörben 11–12. osztályosok között. Ezt a tematikát egyelőre még nem volt szerencsém kipróbálni, így ez csak egy szubjektív elképzelés, amely mentén a Kerettantervben adott 15 tanórát fel lehet építeni. Fontos megjegyezni, hogy a tematika természetesen minden csoportra újragondolandó, hiszen nagyban kell igazodnia a tanításnak a célközönséghez, azaz magukhoz a diákokhoz.

4.2. Egy lehetséges 15 tanórás tematikus terv

A tematikát úgy állítottam össze, hogy a Kerettantervben megadott témakörök mind előkerüljenek. A 15 tanórás célkitűzés az volt, hogy az utolsó két órán a szakdolgozatban tárgyalt három feladatnak minél több elemi megoldásáról szót tudjunk ejteni. Ezért foglalkozunk viszonylag sokat az órák folyamán diszkriminánsvizsgálatokkal (akár harmadfokú esetben is) és nevezetes közepekkel. A Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség is részletesen kerül terítékre, míg a Bernoulli-egyenlőtlenséggel és a Jensen-egyenlőtlenséggel csak 1-1 tanórát foglalkozunk. Minden órához megadtam, hogy azon milyen munkaformákat képzeltem el, hogy milyen kapcsolódási pontok köthetők a tananyaghoz az órán és mi a kimeneti céloom az adott 45 percre. Az órák többségéhez motivációs feladatokat is kitűztem. Ezek egyfajta gondolatébresztésként szolgálnak, és érzékeltetik, hogy az adott tanóra milyen típusú feladatok megoldásához szeretne kapcsolódni. A feladatkörben rejlő izgalmas lehetőség, hogy több korábbi témakör kapcsolódik össze, sok területről hozzuk elő az eddigi ismereteinket és bővítjük azokat. A feladatok között szerepelnek geometriai, illetve koordináta geometriai kérdések, trigonometrikus azonosságok, függvénytan és algebrán belül a középértékekkel, hatványozással és magasabb fokú egyenletekkel kapcsolatos érdekességek is. Az 1., 2., 4. és 9. órán alapvetően már meglévő tudás rendszerezése, míg a 3., 5., 10., 12. és 13. órán új ismeretek elsajátítása a cél. A többi órán feladatok gyakorlásával mélyítjük a tudásunkat. Sok helyen alkalmazok páros vagy önálló munkát, míg az egyik órán csoportmunkában dolgozunk, és lesz egy olyan óra is, amelyen a tanórai internetes kutatást próbáljuk ki.

1. óra: Másodfokú függvények teljes négyzetté alakítása és diszkriminánsvizsgálata

Munkaforma: közös gondolkodás, feladatmegoldás.

Kapcsolódási pontok: másodfokú függvények, függvénytulajdonságok, másodfokú egyenletek, paraméter fogalma.

Kimeneti cél: A korábban a másodfokú kifejezésről tanultak felelevenítése és alkalmazása összetett feladatokban, akár paraméter használatával.

Motivációs feladatok:

1. Keressük meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x - 2$ függvény szélsőértékeit!
2. Határozzuk meg $f: [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6}$ függvény szélsőértékeit! (Felvételi 2000. május)

Az óra első felében az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú függvények szélsőértékének meghatározásával foglalkozunk. Közös gondolkodás keretében gondoljuk végig, hogy milyen alakúak az ilyen másodfokú függvények, hogyan dönthető el, hogy minimuma vagy maximuma van az adott függvénynek. Ezután adódik a két módszer a szélsőérték-keresésre: egyszerűbb látni talán azt, amikor a függvény zérushelyeinek megtalálásával tudunk következtetni arra, hogy pontosan a kettő zérushely átlagánál („középen”) van a szélsőérték hely (ez persze csak abban az esetben működik, ha van zérushely). Másik módszer – amely bármilyen másodfokú függvény esetén működik – a teljes négyzetté alakítás, ami szintén eszünkbe juthat, hiszen, amikor a teljes négyzet értéke 0, az fogja jelenteni a szélsőértéket. Ez a módszer talán azért fontosabb, mert a teljes négyzetté alakítás ötlete több helyen is előfordul matematikai tanulmányaink során.

Az előző gondolatmenetből kiindulva jussunk el odáig, hogy vajon, ha nem függvényre, hanem mint egy $ax^2 + bx + c = p$ paraméteres egyenletre tekintünk, akkor tulajdonképpen szélsőérték-keresés

helyett mi lenne a feladat szövege, célja. Pontosan az, hogy milyen x értékek mellett lesz a p paraméter értéke maximális vagy minimális. Ebben a pillanatban érkezünk meg a diszkriminánsvizsgálatig: akkor lesz p értéke maximális vagy minimális, ha a 0-ra rendezett egyenletünk diszkriminánsa éppen 0-val egyenlő. Érdemes ezt is végiggondolnunk ugyanazzal a függvénnyel, amelyiket már kétféleképpen is megvizsgáltuk. Ezután bonyolultabb függvények szélsőérték-keresésével is próbálkozzunk, mint amilyen például a 2. motivációs feladatban is szerepel.

2. óra: Koordináta-geometriai érintős feladatok diszkriminánsvizsgálattal

Munkaforma: páros munka, feladatmegoldás.

Kapcsolódási pontok: koordináta geometria: egyenes, kör, parabola egyenlete, érintő fogalma.

Kimeneti cél: Kör külső pontjából húzott érintőjének meghatározása kétféle módon, míg parabola érintőjének keresésre a diszkriminánsvizsgálatos módszer általánosításával.

Motivációs feladat:

1. Írjuk fel a $y = 2x^2$ egyenletű parabola összes olyan érintőjének egyenletét, amely átmegy az adott ponton!

a) $P(2; 8)$ b) $Q(1; 8)$ c) $R(3; 8)$

Az előző órán átgondolt diszkriminánsvizsgálatnak egy fontos alkalmazását tanulmányozzuk ezen az órán, ami nem más, mint a koordináta-geometriai érintős feladatok típusa. Az óra elején páros munkára kapjanak a diákok egy feladatot, melyben egy adott kör adott külső pontjából húzott érintőit kell megkeresni. Ezt a feladatot meg lehet oldani a Thalész-tétel segítségével és diszkriminánsvizsgálattal is. A feladathoz eleinte ne fűzzünk semmilyen útmutatást, csupán annyit mondjunk, hogy próbálják akár többféleképpen is megoldani. Majd 5-10 perc eltelte után nyújtunk segítséget azoknak a diákoknak, akik nem tudtak elindulni a feladatmegoldásban: vajon mi köze ennek a feladatnak ahhoz, amit múlt órán tanultunk? Hogyan írnod föl azon egyenesek egyenleteit, amelyek átmennek az adott ponton? Ezek közül milyen speciális helyzetben van az az egyenes a körhöz képest, amelyiket keresed?

Majd a feladatot megoldó párokból valaki mutassa be a megoldását a táblánál. A Thalész-tételes megoldásnak csak a vázlatát kérjük (ha nincs olyan sok időnk), míg a diszkriminánsvizsgálatot részletesen beszéljük meg. A megoldások után térjünk rá a parabola érintőire vonatkozó kérdésre. A motivációs feladatban szereplő három pontnak más az elhelyezkedése a parabolához képest. Ezzel kapcsolatban tisztázzuk a parabola érintőjének pontos definícióját, s ebből következően a belső pontot (R) zárjuk is ki a továbbiakban az érintőkeresésből. A parabola pontjában (P) húzható érintőt és a külső pontból (Q) húzható érintőket diszkriminánsvizsgálattal találjuk meg. Ezután érdemes kitérünk arra, hogy bár kör esetén a Thalész-tételes megoldás elegáns, de nem általánosítható parabolára, ellipszisre, hiperbolára, míg a diszkriminánsvizsgálat igen. A hátralévő időben ezek érintőivel foglalkozunk nem túl bonyolult egyenletű kúpszeletek esetén.

3. óra: Harmadfokú függvények szélsőérték-keresése

Munkaforma: internetes kutatás.

Kapcsolódási pontok: másodfokú egyenlet, speciális magasabb fokú egyenletek, szorzattá alakítás, gyöktényezős alak.

Kimeneti cél: Új fogalmak: harmadfokú egyenlet diszkriminánsa, Cardano-formula megismerése.

Motivációs feladat:

1. Milyen szélsőértékei vannak a következő függvényeknek?

- a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^3$
- b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^3 - 2x + 4$
- c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = x^3 - 3x + 2$
- d) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = x^3 - 4x + 3$
- e) $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_5(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Az óra egy kis kitekintést nyújt az eddigi témakörből: a harmadfokú függvényekkel és azok grafikonjával, valamint harmadfokú egyenletekkel és azok gyökeivel foglalkozunk. A tanóra elején ötletbörze-szerűen gyűjtjük össze minden előzetes tudásunkat a harmadfokú függvényekről, egyenletekről. Ezután konkrét példák (pl. f_1 , f_2 és f_3 függvények) segítségével beszéljük meg, hogy általában hogyan nézhet ki a harmadfokú függvények grafikonja, hol vannak a zérushelyeik, mit nevezünk lokális minimumnak és maximumnak. Ezeknek a függvényeknek az ábrázolásához használjunk például Geogebra-t vagy grafikus számológépeket.

Kerüljön szóba, hogy egy f harmadfokú függvény zérushelyeit úgy kapjuk meg, ha az $f(x) = 0$ harmadfokú egyenletet megoldjuk. Ennek gyökeiről, és azok meghatározásáról is beszéljünk. Fontos hangsúlyoznunk, hogy ha egy gyökre rájövünk, akkor a többi gyök megtalálása jelentősen könnyebb lesz, hiszen a kiemelhető gyöktényező mellett a másik tényező másodfokú, amelynek gyökeit megadja a másodfokú megoldóképlet. Próbáljuk megtalálni a f_5 függvény zérushelyeit így, hiszen látható, hogy $f_5(1) = 0$ éppen, tehát az $(x - 1)$ gyöktényező kiemelhető. Kiemelés után kapjuk, hogy a másik tényező $x^2 - 5x + 6$, amelynek gyökei könnyen meghatározhatók.

Viszont, ha ránézésre egy gyököt sem találunk meg, akkor előkerülhet a Cardano-formula. Ezt egy telefonon történő internetes kutatással kezdjük: keressük meg a Cardano-formulát és azt, hogy az milyen harmadfokú egyenletekhez használható. Idő híján ne lássuk be, hogy minden harmadfokú egyenlet $x^3 + px + q = 0$ alakra hozható, viszont az f_2 , f_3 , f_4 függvények éppen ilyen alakúak, úgyhogy ezekre alkalmazzuk a formulát. Beszéljünk a tapasztalatainkról: a formula (a valós számkörben maradván) csak az egyik gyököt adja meg (akkor is ha több van). Már az f_2 függvény esetén is nehéz a behelyettesítés (észre kell venni, hogy a köbgyökök alatt harmadik hatványok állnak), de az f_4 függvény esetén komoly probléma van a képletbe való behelyettesítéssel, mert negatív kifejezés áll a gyökjel alatt. Ennek kapcsán beszéljünk a diákokkal kicsit a komplex számokról. Ezután a harmadfokú egyenlet diszkriminánsát is keressük meg az interneten, és annak is nézzünk utána, hogy mi a kapcsolata a gyökökkel. Az előző függvények példáin ellenőrizzük is le az interneten talált kapcsolat helyességét.

Ezután olyan harmadfokú függvény lokális minimum- és maximumhelyeiről vonjunk le következtetést a grafikonja segítségével, melynek három zérushelye van (pl. f_5 függvény). Az óra végén a 2.6. Tételt bizonyítsuk be, és hangsúlyozzuk, hogy ez is tud segíteni bizonyos helyzetekben a szélsőérték megtalálásában. Ha marad időnk, akkor ehhez fűzzünk részletesebb magyarázatot a 2.5. szakasz alapján.

4. óra: Kéttagú nevezetes közepek és a köztük fennálló egyenlőtlenségek

Munkaforma: csoportmunka.

Kapcsolódási pontok: átlag, nevezetes azonosságok, pont körre vonatkozó hatványa, a kör esetén a nevezetes közepek szemléltetése.

Kimeneti cél: Kéttagú nevezetes közepek felidézése és a köztük fennálló egyenlőtlenségek bizonyítása.

Az óra célja, hogy felelevenítsük a kéttagú nevezetes közepeket, amelyekről már tanultunk: számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közepek. Kezdjük a nevezetes közepek körhöz kapcsolódó szemléltetéseivel, majd ez alapján a közepek közt fennálló egyenlőtlenségeket sejtjük meg (vagy idézzük fel), s a diákok 4-5 fős csoportokban dolgozzanak a bizonyításokon. Mindegyik csoport a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséggel kezdje, majd haladhatnak tetszés szerint. Fontos, hogy folyamatosan kövessük a diákok gondolatmeneteit, és tudjunk segítő kérdéseket feltenni, ha valahol elakadnak a tanulók. Az utolsó 12-15 percben egy-egy csoport diákja adja elő a bizonyításokat a táblánál. Lényegében három bizonyítás fog a táblára fölkerülni ($H \leq G$; $G \leq A$; $A \leq Q$). Közben a diákok pontosítsák a bizonyítást, ha valahol szükséges. Fontos kitérni a tételben szereplő egyenlőségek előfordulására, ezt ne felejtjük el minden esetben megbeszélni. Ha többféle bizonyítás előkerül, igyekezzünk minél többet tisztázni. Házi feladatnak érdemes föladni, hogy gondolkozzanak az n -tagú nevezetes közepek közti összefüggések bizonyításán.

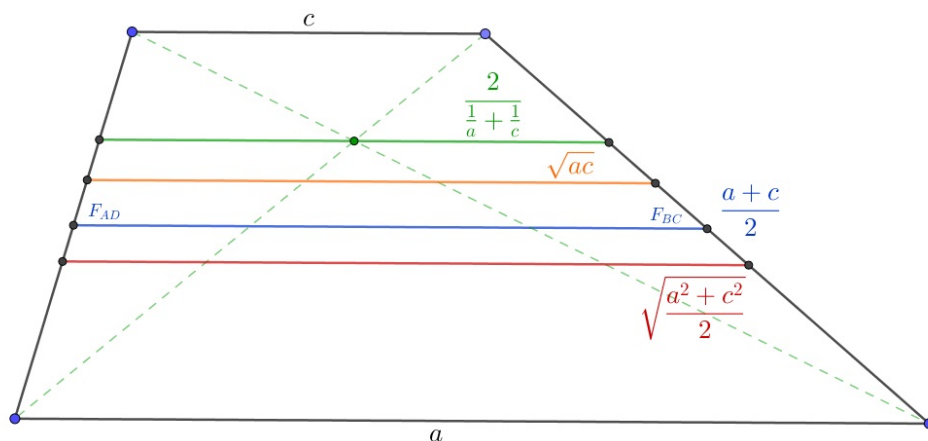
5. óra: Kéttagú nevezetes közepek trapézban és az n -tagú nevezetes közepek

Munkaforma: közös gondolkodás.

Kapcsolódási pontok: geometria: kéttagú közepek trapézban, trapéz tulajdonságai, teljes indukció.

Kimeneti cél: Kéttagú közepek felismerése trapézban, majd a múlt órai ismeretek általánosítása n -tagú nevezetes közepekre.

A tanóra elején tegyük fel a kérdést a diákoknak, hogy egy trapézban vajon hol fedezhetőek fel az alapok hosszainak nevezetes közepei. Legkönnyebb észrevenni az alapok hosszának számtani közepét a trapézban, de ez alapján sejtjük meg, hogy a mértani, a négyzetes és a harmonikus közép is megtalálható valahol. Keressük meg ezeket, készítsük el a 4.1. ábrát a táblára. (Belátható, hogy az alapok hosszának számtani közepe a trapéz középvonala; mértani közepük annak az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amelyik két egymással hasonló trapézra osztja az eredeti trapézt; harmonikus közepük annak az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amely átmegy az átlók metszéspontján; és négyzetes közepük annak az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amely két egyenlő területű trapézra osztja az eredeti trapézt.)



4.1. ábra. Trapéz alapjainak nevezetes közepei

Ezután célunk, hogy a múlt órán megismert nevezetes közepeket és a köztük fennálló egyenlőtlenségeket általánosítsuk n tag esetén. Ehhez mindenképpen tisztázzuk először, hogy mit értünk n -tagú nevezetes közepeken. Véleményem szerint érdemes az n -tagú bizonyítások előtt megmutatni Cauchy bizonyítását a számtani és mértani közepek közti összefüggésre 4, majd 3 tagra, mert az ötlet könnyen általánosítható 2^n tagra. Ezt a bizonyítást ismertettük a 2.2. szakaszban. Írjuk föl az n -tagú nevezetes közepeket és sejtjük meg a köztük fennálló egyenlőtlenségeket. Bizonyítsuk a számtani és mértani közepek közti összefüggést és beadható feladatnak adjuk fel a többi egyenlőtlenséget, melyeknek bizonyításától az óra keretein belül eltekinthetünk.

6–7. óra: Feladatok nevezetes közepekkel

Munkaforma: közös gondolkodás, majd csoportmunka.

Kapcsolódási pontok: fizikai mennyiségek (átlagsebesség, eredő ellenállás).

Kimeneti cél: Nevezetes közepek megtalálása és a köztük fennálló egyenlőtlenségek gyakorlása feladatokban.

Motivációs feladatok:

1. Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 12$. Határozzuk meg az a, b és c értékét úgy, hogy az abc^2 kifejezés értéke maximális legyen!
2. Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc = 12$. Határozzuk meg az a, b és c értékét úgy, hogy az $a^2 + b^2 + c^2$ kifejezés értéke minimális legyen!
3. Az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kör első síknegyedbeli érintői közül melyik metszi le a koordinátatengelyekből a legkisebb területű háromszöget?
4. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan pozitív a és b számra, melyre $a + b = 1$, igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

5. Adott az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^6 + \frac{6}{x^2}$ függvény. Határozzuk meg a függvény minimumhelyét és minimumértékét!

Az óra célja az, hogy a nevezetes közepek közti egyenlőtlenségeket felhasználva oldjunk meg feladatokat. Alapvetően két típusra gondolok: hogyan használhatóak ezek a közepek egyenlőtlenségek bizonyítására, és hogyan lehet egy kifejezés szélsőértékeit megtalálni a közepek segítségével. A kulcskérdés ezeknél a feladatoknál mindig az, hogy a megoldáshoz vajon mely közepekre van szükség? Ennek a meglátásához érdemes megfigyelni, hogy a szóban forgó kifejezésben szerepel-e gyökvonás (mértani közép), négyzetek összege (négyzetes közép), milyen hányados jelenik meg (számtani közép), vagy esetleg a megjelenő hányadosnak a reciproka egyszerűbb-e, mint maga a hányados (harmonikus közép). . . Sokszor nem magától értetődő észrevenni, hogy pontosan milyen kifejezések fogják a nevezetes közepekben a tagok szerepét betölteni. Több feladaton keresztül gyakoroljuk azt, hogy a megfelelő közepeket fölismerjük.

Az órák menete alapulhat közös feladatmegoldáson, ötletelésen, főleg első alkalommal. De a második órán próbáljuk ki azt is, amikor csoportonként megoldanak a tanulók egy-egy feladatot (minden csoport más feladatot kap), majd megkeverjük a tanulókat, és új csoportokat hozunk létre úgy, hogy

mindenhol legyen mindegyik feladatnak egy-egy megoldója. Ebben az új csoportban pedig mindenkinek el kell magyaráznia az általa ismert feladat megoldását a többieknek, akik másik feladaton dolgoztak eredetileg (mozaik módszer). Érdekes ekkor olyan feladatokat választani az egyes csoportoknak, hogy egymástól eltérő közepek közti összefüggést kelljen használniuk.

8. óra: Izoperimetrikus problémakör

Munkaforma: feladatlap.

Kapcsolódási pontok: kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás.

Kimeneti cél: Nevezetes közepek használata az izoperimetrikus problémakörben.

Motivációs feladatok:

1. Egy rendezvényen szeretnénk elkülöníteni a VIP részleget kordonszalaggal. Ehhez egy 30 m-es kordonszalag áll rendelkezésünkre. Mekkora az a legnagyobb területű téglalap alakú rész, amelyet ezzel a szalaggal körül tudunk keríteni?
2. Egy patak partján egy 3200 m^2 nagyságú, téglalap alakú kertet szeretnénk elkeríteni vízi szarvasaink részére. Mekkora az a téglalap méreteit, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség? (A patakparton nem állítunk kerítést.)
3. Van egy 2 m^2 -es csomagolópapír ívünk. Mekkora az ezzel becsomagolható téglalap alakú ajándékok között a legnagyobb térfogatú? (Tekintsünk el a ráhajításokról.)
4. Adott egy kör alakú lap. Mekkora annak a körcíknek a középponti szöge, amelyből a legnagyobb térfogatú tölcser hajtható?

A nevezetes közepek felhasználása igen gyakran előfordul az úgynevezett izoperimetrikus problémakörben. Ezek olyan típusú feladatok, melyek során meghatározott feltételek mellett szeretnénk síkidomok területét vagy testek térfogatát maximalizálni, vagy a kerületet, felszínt minimalizálni. Ennek alapvető példái a fenti motivációs feladatok. Ez a problémakör akár a mindennapi élethez is köthető, hiszen gyakran előfordul, hogy valamiből a „legnagyobbat” szeretnénk megszerezni, vagy a „legkisebb kerítéssel” szeretnénk bevonni.

Éppen ezért az óra elején gyűjtsünk példát arra, hogy milyen szöveges feladatokat tudnának elképzelni a diákok ebben a problémakörben. (Pl. Adott parabola alakú alagútban mekkora a legnagyobb keresztmetszetű teherautó, amelyik át tud menni?) Először legyen idő arra, hogy mindenki önállóan ötleteljen, majd osszuk meg gondolatainkat. Még az is előfordulhat, hogy egy diák által mondott feladaton el tudjuk kezdeni a feladatmegoldást, de természetesen érdemes készülnünk olyan feladatokkal, amelyekre valóban „könnyen” alkalmazható valamelyik nevezetes közepek közti összefüggés. Közös feladatmegoldás után ki lehet osszunk ki többféle szöveges feladatot, amelyek közül választhatnak a diákok, hogy melyik kelti föl az érdeklődésüket. Előfordulhat, hogy nincs idő minden feladatot megbeszélni, de ekkor is érdemes a jó megoldást például kiosztani óra végén azoknak, akik foglalkoztak a feladattal, ám elakadtak, vagy ellenőrizni szeretnék magukat.

9. óra: Trigonometrikus szélsőérték-feladatok

Munkaforma: közös gondolkodás.

Kapcsolódási pontok: trigonometrikus azonosságok, fizikában: fáziseltolás.

Kimeneti cél: Összetettebb trigonometrikus függvények értékkészletének és szélsőértékhelyeinek vizsgálata.

Motivációs feladatok:

1. Határozzuk meg $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 1$ függvény értékkészletét!
2. Határozzuk meg $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\alpha) = 5 \sin \alpha + 12 \cos \alpha$ függvény értékkészletét!

Az óra célja, hogy felelevenítsük a trigonometrikus függvényekről tanultakat, majd összetettebb trigonometrikus függvényeket vizsgáljunk. Az első motivációs feladatot önálló munkára bízunk, hiszen a koszinuszfüggvény értékkészlete alapján nem nehéz az $f(x)$ függvény értékkészletére következtetni. Keményebb dió a második feladat, amelyhez szükségünk van arra az ötletre, hogyan tudjuk azt visszavezetni az első feladatra, vagyis hogy csak egyetlen szögfüggvény szerepeljen a kifejezésben. Ezt a feladatot közös gondolkodással oldjuk meg. Ha senkinek nem jut eszébe ötlet, akkor érdemes felidézni az addíciós képleteket, akár minél többet, hogy aztán azok alkalmazásai közül válogassanak a diákok. (Arra is föl kell készülnünk, hogy ha nem ezen az úton indulnak el a diákok, amelyet mi gondoltunk, akkor tudjunk arra jól reagálni, és meglátni abban a jót és a hibát egyaránt.) Ha eljutunk odáig, hogy például a $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ összefüggést lehet alkalmazni, még onnantól is a táblán aprólékosan, sok magyarázattal vezessük le a feladatmegoldást. Beszéljük meg azt is, hogy a függvény hol veszi fel a szélsőértékeit, ekkor már tulajdonképpen egy-egy trigonometrikus egyenletet kell csak megoldanunk. Ezután pármunkának vagy házi feladatnak adjunk hasonló feladatokat.

10–11. óra: A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség feladatokkal

Munkaforma: közös gondolkodás, pármunka.

Kapcsolódási pontok: vektorok, skaláris szorzat definíciója és számolása koordinátákból, több dimenzió.

Kimeneti cél: A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség megismerése és alkalmazása feladatokban.

Motivációs feladatok:

1. Bizonyítsuk be, hogy $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ bármilyen pozitív vagy negatív (esetleg 0) számokat jelentsen a, b, c, d . Mikor érvényes az egyenlőség jele? (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1955/1956. tanév)
2. Legyenek $a, b, c \geq -\frac{1}{2}$ valós számok és $a + b + c = 1$. Adjuk meg a $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$ kifejezés maximumát!
3. Milyen x, y számpárookra teljesül a $3 \sin x - 4 \cos x = 4y^2 + 4y + 6$ egyenlőség? (KöMaL, F. 2554.)

A trigonometria témaköréből nem nehéz továbblépni a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenségnek arra az alakjára, mikor $n = 2$. Tegyük föl óra elején a kérdést, hogy hol találkoztunk még trigonometrikus függvényekkel tanulmányaink során. A felsoroltak között reményeink szerint ott lesz a skaláris szorzás. Írjuk fel az összefüggést a vektorok hossza és hajlásszögüknek koszinusza, valamint a vektorok koordinátái között. A koszinuszérték felső becslésével adódik az egyenlőtlenség. Érdemes ezután algebrailag is belátni az összefüggést. Majd mondjuk ki a tételt általánosan (térjünk ki arra, hogy ekkor tulajdonképpen több dimenziós vektorok skaláris szorzatát is érthetjük ez alatt), és nehezebb szorgalmi feladatnak adjuk fel a bizonyítást.

Ezután hozzunk többféle feladatot, melyekre alkalmazható a tétel. Kezdjük például azzal, amelyiket az előző órán trigonometrikus átalakításokkal oldottunk meg. Az óra első felében közös feladatmegoldás legyen, majd adjunk feladatokat páros munkára. A fő cél, hogy megismerkedjünk a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséggel és azzal, mikor lehet érdemes ezt alkalmazni. De javasolhatjuk diákjainknak, hogy az eddig tanultakkal (pl. nevezetes közepekkel) is próbálkozhatnak a megoldásaikban. Ezeket a megoldásokat is beszéljük meg röviden, ha van olyan diák, aki más úton próbálkozott.

12. óra: A Bernoulli-egyenlőtlenség

Munkaforma: közös gondolkodás, majd önálló feladatmegoldás.

Kapcsolódási pontok: hatványozás, mértani sorozat összegképlete, binomiális tétel.

Kimeneti cél: A Bernoulli-egyenlőtlenség megismerése és alkalmazása feladatmegoldásban.

Motivációs feladatok:

1. Legyen x pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy $1 + \frac{x}{3} > \sqrt[3]{1+x}$. (Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, 1958/1959. tanév)
2. Bizonyítsuk be, hogy bármely $x \geq 0$ valós számra $x^3 - 3x \geq -2$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 1$.

Az óra elején tűzzük ki az 1. motivációs feladatot megoldásra, s bízunk abban, hogy az óra közben mindenki rájön a megoldásra. Ehhez a Bernoulli-egyenlőtlenséggel ismertessük meg a diákokat. Talán a tanulóknak is eszükbe jut, hogy teljes indukcióval lássanak neki a tétel bizonyításának. Ezt érdemes megbeszélni, de mutassuk meg nekik a dolgozatban szereplő okoskodást, mely csak a mértani sorozatok összegképletét használja, amely nem is emelt szintű tananyag. Ekkor bontsuk két részre a bizonyítást (ahogyan a 2.4 szakaszban is tettük): az $x \geq 0$ eset közös megbeszélése után a $-1 \leq x \leq 0$ esetben több önállóságra bízassuk a diákokat, majd valamelyik diák mutassa be megoldását a táblánál. A tétel megismerése után feladatok következzenek, melyek megoldását eleinte közösen végezzük, majd adjunk feladatot önálló munkára is. Ekkor a teremben járva figyeljük a gondolatmeneteket, és készülünk kérdésekkel arra, hogy tudjuk segíteni az elakadó próbálkozásokat, vagy a pontatlanságokra utalhassunk, ha szükséges. Némi gondolkodási idő után egy megoldó diák a táblánál bemutathatja megoldását, amit a tanulók szükség esetén pontosíthatnak. Jutalmazzuk is, ha valaki önként jelentkezve szívesen elmagyarázza helyes gondolatmenetét.

13. óra: A Jensen-egyenlőtlenség

Munkaforma: közös gondolkodás.

Kapcsolódási pontok: függvénytan, függvénytulajdonságok, függvénytranszformációk, (logaritmusfüggvény).

Kimeneti cél: A Jensen-egyenlőtlenség ismerete és alkalmazása feladatokban, illetve használata a nevezetes közepek közti egyenlőtlenségek bizonyítására.

Motivációs feladatok:

1. Melyik nagyobb: $\sqrt{10} + \sqrt{20}$ vagy $2 \cdot \sqrt{15}$?
2. Melyik nagyobb: $3^{100} + 5^{100}$ vagy $2 \cdot 4^{100}$?

Az órát az első két feladattal kezdjük. Az első négyzetre emeléssel meg is fogjuk tudni oldani, de a másodikhoz új ismeretre lesz szükségünk. Ekkor kerüljön képbe az új tétel: a Jensen-egyenlőtlenség.

Ezután a Jensen-egyenlőtlenséggel ismertessük meg a diákokat. Először érdemes beszélgetni a tételről, amihez fontos a tételben szereplő fogalmakat pontosan letisztázni (akár definiálni). Ezt a tételt bizonyítás nélkül fogadjuk el, csupán egy szemléletes ábrát mutassunk arról, hogy a konvexitás, illetve a konkávitás éppen a grafikon és tetszőleges húrja közti kapcsolatot jelenti (mint az 1.3. ábrán). A Jensen-egyenlőtlenség ezt fogalmazza meg általánosan. Ennek a tételnek a segítségével újra oldjuk meg az első feladatot, majd a másodikat. Beszéljük meg mindkét példa esetén, hogy a konkrét feladatban melyik az f függvény (és az valóban konvex/konkáv) és mik a tételben szereplő a_i -k és t_i -k.

A tétel kiváló segédeszköz más nevezetes egyenlőtlenségek bizonyításához, ezért az óra további részében az a célunk, hogy az eddig ismert közepek közti egyenlőtlenségeket ennek segítségével belássuk. Célszerű a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséggel kezdeni, amelynek belátásához a diákokat vezessük rá (ha szükséges), hogy az $f(x) = x^2$ függvény konvexitását használják ki. A számtani és mértani közepek közti összefüggést az $f(x) = \log x$ függvény konkávitásából lehet belátni, erre is érdemes a diákokat ügyesen terelgetni úgy, hogy felhívjuk a figyelmüket az $\log x + \log y = \log xy$ azonosságra. Végül pedig ismerjük meg bizonyítással a súlyozott számtani és négyzetes közepek közti összefüggést két tagra (1.8. Tétel).

Az óra végén adjuk fel házi feladatnak a szakdolgozat három feladatát. Sok ez a három feladat, úgyhogy érdemes kikötni, hogy a háromból legalább kettőhöz keressenek legalább egy-egy megoldást. A következő órákon ezekkel a feladatokkal fogunk foglalkozni.

14–15. óra: A szakdolgozat három feladatának érdekes megoldásai

Munkaforma: tanulói feladatmegoldás bemutatása táblánál („kiselőadás”).

Kapcsolódási pontok: eddigiek alkalmazása.

Kimeneti cél: A témakörben tanult ismeretek alkalmazása akár egy feladat esetén is többféleképpen.

Az első órán az 1. fejezet 1. feladatával foglalkozzunk részletesebben. Akinek van jó megoldása, az a táblánál mutassa be, mintha ő lenne a tanár (használhatja a füzetét, amíg ez nem túl zavaró), s a többiek utána értékeljék a munkáját: helyes volt-e a megoldás, mennyire volt érthető, követhető. Fontos, hogy sokat dicsérjünk, hiszen nem kis dolog egy osztály vagy csoport előtt világosan és érthetően bemutatni egy gondolatmenetet. Az ügyes megoldásokat díjazzuk kisötössel, ötössel. Az idő függvényében elhangozhatnak az 1.3., az 1.4., az 1.5., az 1.6., az 1.8., az 1.9. szakaszokban leírt megoldások. Ha van olyan megoldás, amire a tanulók nem gondoltak, akkor mutassuk meg nekik az alapötletet, hogy onnantól kezdve továbbgondolhassák a levezetést.

Az ezt követő órán pedig a 2. fejezet 2. és a 3. fejezet 3. feladatával foglalkozzunk hasonlóan, amelyeknek megbeszélendő vagy megbeszélhető megoldásaik a 2.2., a 2.3., a 2.4., a 2.5., a 3.2., a 3.4., a 3.6. szakaszokban találhatók.

4.3. Az 1. fejezet 1. feladata diákszemmel

Volt szerencsém bevinni egy gimnázium 11. osztályos tanulóihoz a szakdolgozatban tárgyalt 1. feladatot. Egy 17 fős fakultációs fiúcsoportnak adtam oda a feladatot 20 percre. Ez az idő nagyon kevésnek tűnhet, de fontos megjegyezni, hogy elsősorban nem arra voltam kíváncsi, hogy meg tudják-e oldani, hanem, hogy milyen ötletük támad, milyen megoldási úton indulnak el. Azt kértem a diákoktól, hogy

írják le pár mondatban a gondolataikat, akármi is legyen az. (Persze, ha az idő elégnek bizonyult, meg is oldhatták a feladatot.) A „kísérlet” célja az volt, hogy némi képet kapjunk arról, hogy a dolgozatban ismertetett 9 megoldási módszer közül vajon melyik az, amelyik először a diákok eszébe jutna.

Az eredmény természetesen nem lett igazán reprezentatív, hiszen csak egy csoporttal végeztem el a kísérletet. Viszont néhány érdekes tapasztalatot azért le tudtam vonni.

A legszembetűnőbb, hogy akadt két tanuló, akik tudtak deriválni (a csoport még nem tanulta a differenciálszámítást, viszont ők ketten már ismerték ezt a módszert), és ezt a fajta megoldásukat végig is vezették, és jó végeredményre jutottak. Mindketten leírták az 1.2. szakaszban tárgyalt megoldást, és egyikük még (plusz időt kérve) az 1.3. szakaszban megemlített másik differenciálszámításos megoldást is leírta, amelyben a trigonometrikus helyettesítést tudta ügyesen alkalmazni. A többi tanuló elemi módszerekkel próbálkozott – kevésbé sikeresen.

Még egy diák volt, aki hiányos indoklással, de rájött a helyes megoldásokra. Először a maximumkereséshez a 0 és az 1 számok behelyettesítésével próbálkozott, de végül talált olyan helyet, ahol a $2x + 3y$ kifejezés értéke nagyobb lett, s ezt egyszerűen elfogadta maximumnak. Ötlete az volt, hogy talán az $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ arány esetében lesz maximális a kifejezés értéke. Ebből x -et kifejezte, s megoldotta a $\frac{4}{9}y^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Viszont pontos megjegyzést fűzött a végén a minimumkereséshez, miszerint azt ugyanígy csinálná, és a maximumérték ellentettjét kapná minimumértéknek.

Más sikeres megoldás nem született ebben a csoportban. Hárman írták le, hogy maximumkereséshez pozitív (vagy 0) számokkal próbálkoznának, míg minimumkereséshez negatív (vagy 0) számokkal, de ez a fajta gondolat nem volt jellemző a csoportra. A legtöbb helyen első próbálkozásként néhány szám behelyettesítése szerepelt. Ez esetben mindenki figyelt arra, hogy az x legyen kisebb szám y -nál, hiszen a kifejezésben kisebb az együtthatója. Sokan nem tudták elengedni azt a gondolatot, hogy a kifejezés biztosan akkor lesz maximális, ha $x = 0$ és $y = 1$ (vagy x picit nagyobb, mint 0, és y picit kisebb, mint 1), mert próbálkozásaik során nem találtak 3-nál nagyobb értékét a kifejezésnek. Ezenkívül jellemző volt még, hogy a feltételből kifejezték például az y -t, és így a kérdéses kifejezés már csak x -től függővé vált. Ekkor leírták néhányan, hogy ábrázolni kellene a függvényt, hogy láthassuk a minimumot, ami jó gondolat, de az ábrázolás sajnos nem egyszerű feladat. Ez nem is sikerült senkinek. Volt öt tanuló, akik jól felismerték, hogy lehetne használni a feladathoz trigonometrikus helyettesítést, de sajnos az ötletet nem tudták ügyesen folytatni.

Előkerült egy-egy helyen nevezetes azonosság, derékszögű háromszög, logaritmus, de más ötlet nem jutott a tanulók eszébe. Valószínűleg a tanulók nem hallottak a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenségről, és a koordinátageometriával sem ismerkedtek még meg mélyebben, ezért a nevezetes közepek használata vagy némi trigonometria és diszkriminánsvizsgálat merülhetett volna fel bennük. De azok a diákok, akik nem ilyen típusú (verseny)feladatokhoz vannak szokva, még nemigen találkozhattak ehhez hasonlóval.

A kísérletet mégis sikeresnek tartom, mert világosan megmutatta, hogy a differenciálszámítás egy könnyen alkalmazható eszköztár, ha valaki ismeri annak fortélyait. A feladat elemi megoldásai viszont jóval nagyobb kihívást jelentenek egy középiskolás diák számára.

Irodalomjegyzék

- [1] Besenyei Ádám: Séta a havon – az ezerarcú feladat I–III., KöMaL, 2016/8, 455–461.; 2016/9, 514–525.; 2017/1, 2–7. <http://abesenyei.web.elte.hu/publications/homezo.pdf> (Utolsó letöltés: 2019. április 1.)
- [2] Gémes Margit – Szentmiklóssy Zoltán: Bevezető analízis I. jegyzet és példatár, elektronikus jegyzet, https://margitgemes.web.elte.hu/Peldatar_OSZK/bevaBook.pdf (Utolsó letöltés: 2019. április 1.)
- [3] Kiss Emil: Bevezetés az algebra, Typotex Kiadó, Budapest, 2014.
- [4] Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Matematika tankönyv, 12. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [5] Középiskolai Matematikai Lapok archívuma, <http://db.komal.hu/KomalHU/> (Utolsó megnyitás: 2019. április 1.)
- [6] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Valós analízis I–II., Typotex Kiadó, Budapest, 2012.
- [7] Major Zoltán: Egy izgalmas szélsőérték-feladat család (Az izoperimetrikus problémakör), szerzői kiadás, Sopron, 2012. <http://major-world.com/0-img-k/izoperimetrikus-bemutato-peldany.pdf> (Utolsó letöltés: 2019. április 1.)
- [8] Németh József: Szélsőérték-problémák a mindennapi életben, http://eta.bibl.u-szeged.hu/1800/1/szelsoertek_problemak.pdf (Utolsó letöltés: 2019. április 1.)
- [9] Pólya György: Indukció és Analógia (A matematikai gondolkodás művészete I.), Gondolat Kiadó, Budapest, 1988.
- [10] Pósa Lajos: Összefoglalás (algebra, függvények, számelmélet, kombinatorika), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1999.
- [11] Pósa Lajos: Összefoglalás – Megoldások, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1999.
- [12] Varga János: Bernoulli egyenlőtlenségének algebrai bizonyítása, KöMaL, 2017/4, 200–201.
- [13] VersenyVizsga Portál, <http://versenyvizsga.hu/> (Utolsó megnyitás: 2019. április 1.)