Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Érdekes összegek

Szakdolgozat

Készítette:
Pressing Dániel
Matematika BSc Tanár

Témavezető:
dr. Besenyei Ádám
Adjunktus

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban a végtelen összegekkel, vagy más néven sorokkal foglalkozom. A végtelen fogalma a matematikába nehezen épült be, ehhez kapcsolódóan a végtelen összegek témaköre is. A véges esetre érvényes, triviálisnak tűnő szabályok, azonosságok nem mindig alkalmazhatóak végtelen esetre is, és emiatt rengeteg ellentmondást okoztak.

Végtelen összegekkel már a gimnáziumi tanulmányaink során is találkozhatunk. A középiskolai versenyfeladatok sűrűn előforduló típusfeladata, hogy adjuk meg egy végtelen összeg pontos értékét, vagy becsüljük meg egy felső korlátját. Ezen feladatok megoldásához szükséges ismeretanyagot, illetve megoldási technikákat mutat be a dolgozatom.

A dolgozat három nagyobb egységre bontható. Az első részben egy rövid történeti áttekintés után a sorok definíciója, alapvető tulajdonságaik, összefüggések, továbbá a később alkalmazandó konvergenciakritériumok olvashatók. Ezután részletesen bemutatunk néhány ismert és érdekes végtelen összeget, mint például a harmonikus sor, vagy a négyzetszámok reciprokainak összege.

A harmadik részben különböző matematikai versenyek feladatait oldjuk meg a korábban ismertetett módszerekkel. A legtöbb feladat az OKTV-ből származik, de a KöMaL-ban, illetve a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián is gyakran előfordulnak végtelen összeget tartalmazó feladatok.

1. fejezet

Végtelen sorok

1.1. Történelmi bevezető

A végtelen sorok nagyon korán megjelentek a matematikában, már az ókori görögöknél is. Elég gondolnunk például Zénon (i.e. 490–430) híres paradoxonjaira (Akhilleusz és a teknős, a fának hajított kő, stb.), amelyek abból származtak, hogy nem tudták azt, hogy végtelen sok szám összege lehet akár véges is.

Akhilleusz és a teknős paradoxonja a következő. Akhilleusz egy teknőssel fut egy irányban, a kezdeti távolság köztük s. Akhilleusz sebessége cv ($c > 1$), a teknősé pedig v $\frac{m}{s}$. Úgy gondolnánk, Akhilleusz biztosan beéri a teknőst, bármekkora előnyt is ad neki, azonban a paradoxon szerint nem. Ameddig Akhilleusz megtesz s távolságot, a teknős $\frac{s}{c}$ távolságot halad, és amíg Akhilleusz megtesz $\frac{s}{c}$ távolságot, addig a teknős újabb $\frac{s}{c^2}$ távolságot tesz meg, és ez így megy a „végtelenségig”. Mindig lesz így köztük valamekkora távolság, tehát Akhilleusz sosem éri utol a teknőst.

Most pedig a mai matematikai módszerekkel belátjuk, hogy Akhilleusz mégis véges időn belül utol fogja érni a teknőst. Tekintsük minden másodpercben a köztük levő távolságot. Kezdetben ez a távolság s, majd 1 másodperc elteltével $\frac{s}{c}$ és így tovább:

$$s, \frac{s}{c}, \frac{s}{c^2}, \dots, \frac{s}{c^n}, \dots .$$

Könnyen látható, hogy ez a sorozat 0-hoz tart, ugyanis ha $n \to \infty$, akkor $c > 1$ miatt $c^n \to \infty$, ezért $\frac{s}{c^n} \to 0$. Ahhoz, hogy belássuk, Akhilleusz valóban beéri a teknőst, már csak azt kell igazolni, hogy véges időn belül 0-ra csökken a köztük levő távolság. Felhasználva, hogy s távolságot $t = \frac{s}{cv}$ idő alatt tesz meg, a következő végtelen összeget kapjuk a találkozásukig eltelt időre:

$$t + \frac{t}{c} + \frac{t}{c^2} + \ldots + \frac{t}{c^n} + \ldots = t\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \ldots + \frac{1}{c^n} + \ldots\right). \tag{1.1}$$

Ez pedig egy mértani sor, melynek összege

$$t \cdot \frac{c}{c-1} = \frac{s}{cv} \cdot \frac{c}{c-1} = \frac{s}{cv - v},$$

amely véges. Ez azt jelenti, hogy Akhilleusz véges idő alatt beéri a teknőst, tehát véges időn belül meg is fogja előzni.

Hasonló paradoxon a fának hajított kő, melyben Zénón egy tőle 8 lábnyira lévő fától áll, és egy követ hajít annak irányába. Ahhoz, hogy a kő eltalálja a fát, először meg kell tennie az út felét, azaz 4 lábat, majd ahhoz, hogy megtegye a maradék 4 lábat is, még előtte annak felét, azaz 2 lábat kell megtennie, és így tovább. Minden kis távolság megtételéhez valamennyi időre van szükség, így Zénon szerint a kő sohasem éri el a fát. Ezen paradoxon feloldása egy az egyben ugyanaz, mint az Akhilleusz és a teknősé. Zénon idejében a problémát az jelentette, hogy úgy gondolták, mivel mindig egy pozitív számot adunk hozzá az addig eltelt időhöz, a kapott összeg akármilyen nagy lesz, tehát biztosan nem lesz véges.

Később Arisztotelész (i.e. 384–322) már felismerte, hogy az 1-nél kisebb kvóciensű (hányadosú) geometriai sornak van véges összege, így tehát az (1.1) végtelen sok tagból álló összegnek is, azaz felvetődött, hogy végtelen sok pozitív szám összege lehet véges is.

Arkhimédész (i.e. 287–212) munkáiban is megjelentek végtelen összegek a területszámítással kapcsolatban. Miközben a parabolaszelet területét próbálta megállapítani, a következő összeg kiszámítására volt szüksége:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}.$$

Arkhimédész a mértani sorok már korábban felismert tulajdonságainak segítségével be tudta látni, hogy a fenti összeg sosem lesz $\frac{4}{3}$-nál nagyobb.

A középkorban leginkább fizikai problémák vizsgálata során fordultak elő végtelen összegek. Nicole Oresme (1323–1382) francia matematikus, filozófus rengeteg nem mértani sorral foglalkozott, és például vázlatosan be tudta bizonyítani, hogy az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

alakú harmonikus sor minden számnál nagyobb, azaz divergens.

Később a XV. században Kerala Gargya Nilakhanta (1450–1550) indiai csillagász a következő képlet segítségével a π-t egy végtelen összeg alakjában állította elő:

$$r\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{1}\frac{ry}{x}-\frac{1}{3}\frac{ry^3}{x^3}+\frac{1}{5}\frac{ry^5}{x^5}-\ldots\,.$$

Ha ugyanis itt r és $\frac{y}{x}$ helyére 1-et helyettesítünk, adódik, hogy

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\,,$$

azaz egy irracionális számot felírt végtelen sok racionális szám összegeként.

A fenti, $\frac{\pi}{4}$-re vonatkozó formulát Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) is felfedezte, és bizonyítást is adott rá, így később Leibniz-formulának nevezte az utókor. Az ő tevékenysége egyébként leginkább a differenciál- és integrálszámítás megalapozásában a legjelentősebb, de a sorelmélet fejlődésének is óriási lökést adott.

Mindenképpen érdemes megemlíteni még Brook Taylor (1685–1731) és Leonhard Euler (1707–1783) nevét. Mindketten sokat foglalkoztak függvények sorbafejtésével, és rengeteg, végtelen összeget tartalmazó formulát fedeztek fel.

Az idők folyamán még számtalan matematikus foglalkozott a sorok témakörével, mert bizonyos megoldásra váró feladatok igényelték e témakörnek kibővítését, tovább gondolását. A nagyon sok új ismeret mellé azonban számos ellentmondás és paradoxon is társult. Sok ellentmondást okozott például az, hogy nem kezelték külön a konvergens, és divergens sorokat az összegük meghatározása során használt módszerekben. Például tekintsük az alábbi összegeket:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$
$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

Ekkor, ha kivonjuk a másodikból az elsőt, az adódna, hogy $S = -1$, azaz

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots = -1.$$

Ez pedig láthatóan egy ellentmondásos eredmény. A problémát egyébként az okozza, hogy S egy divergens sor, így nem végezhető el a fenti művelet.

Hasonló példa az alábbi, amellyel rengeteg híres matematikus, köztük Leibniz, illetve Euler is foglalkoztak. Azt vizsgálták, hogy mennyi lehet az alábbi végtelen összeg értéke:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots .$$

Leibniz a következőképpen okoskodott. Ha az alábbi módon zárójelezzük az összeget, akkor 0-t kapunk eredményül:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0.$$

Ha viszont az alábbi módon, akkor pedig 1-et:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1.$$

Így arra a „kompromisszumra" jutott, hogy mivel egyszer 1-et, másszor pedig 0-t kapunk eredményül, ezért az összeg nem lehet más, mint ezek átlaga, azaz $\frac{1}{2}$. Ez a gondolatmenet matematikailag nem megalapozott, de némi pontosítás után mégis lehet neki értelmet adni, erre az 1.3 Megjegyzésben még visszatérünk.

Összességében tehát érzékelhető, hogy még a XVIII. században is csak gyerekcipőben járt a végtelen összegek vizsgálata, aminek oka, hogy nem voltak meg azon eszközök (pontos definíciók, és tételek), melyekkel mélyebben vizsgálhatták volna azt.

1.2. Sorok definíciója

E fejezetben definiáljuk, hogy mit is értünk pontosan sor alatt, illetve annak konvergenciáján, ezáltal elkerülve a korábbi ellentmondásokat. (Az elmélet részletesen megtalálható a [8] jegyzetben és az [5] könyvben.)

1.1. Definíció. Legyen (a_n) egy valós számsorozat. Ebből képezzük a részletösszegek sorozatát, jelölje ezt (s_n):

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i. \end{aligned}$$

A végtelen sor egy rendezett pár, amely az (a_n)-ből és az (s_n)-ből áll. Az a_n-t a sor n-edik tagjának, az s_n-t pedig a sor n-edik részletösszegének nevezzük.

Most pedig definiáljuk, hogy mit értünk azon, hogy egy végtelen sor konvergens, illetve ha konvergens, akkor mi a sor összege.

1.2. Definíció. Ha (s_n) konvergens és határértéke A, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens és összege A. Ezt a következőképpen jelöljük: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$. Fontos, hogy a divergens soroknak nem tulajdonítunk összeget, csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (vagy $-\infty$), ekkor a sor összege $+\infty$ (vagy $-\infty$).

1.3. Megjegyzés. A fenti definíciókból következik, hogy az $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ végtelen sornak nincsen összege, ugyanis a részletösszegek sorozata $1, 0, 1, 0, \ldots$, amelynek se véges, se végtelen határértéke nincs. Megjegyezzük ugyanakkor, hogy léteznek olyan eljárások, amelyekkel az olyan divergens soroknak is tulajdoníthatunk összeget, amelyeknek nem létezik határértéke, ezek az úgynevezett szummációs eljárások.

Egy ilyen eljárás például a következő. A sor részletösszegeinek konvergenciája helyett csak azok átlagainak a konvergenciája szükséges. Ez esetben a

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor összege A, ha az $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ részletösszegekre teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = A.$$

Így például az $1-1+1-1+\ldots$ sornak is tulajdoníthatunk összeget, ugyanis a sor n-edik részletösszege 1, ha n páratlan, illetve 0, ha n páros, ezért $n \to \infty$ esetén

$$\left| \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

ami azt jelenti, hogy az $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ sor összege $\frac{1}{2}$.

1.3. Sorok elemi tulajdonságai

Az alábbiakban megfogalmazzuk, hogy mi történik egy konvergens sorral, ha egy valós számmal szorozzuk a tagjait, továbbá hogyan összegezhetünk két konvergens sort, illetve milyen hatása lesz a konvergenciára annak, ha a sor tagjait másképp zárójelezzük.

1.4. Állítás. *Adott $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergens sor, és c valós szám. Ekkor $\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i$ konvergens és összege $c \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.*

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor n-edik részletösszege, illetve

$$t_n := (c \cdot a_1) + (c \cdot a_2) + \ldots + (c \cdot a_n)$$

a $\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i$ sor n-edik részletösszege. Végezzük el az alábbi átalakítást t_n-en:

$$t_n := c \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c \cdot s_n,$$

ebből következően (felhasználva a határértékképzés és a számmal való szorzás között fennálló összefüggést)

$$\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i = \lim_{n\to\infty} t_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} s_n = c \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

□

Az iménti állítás azt jelenti, hogy konvergens sort tagonként szorozhatunk valós számmal, ahogy ez véges összegek esetén tehető.

1.5. Állítás. *Adottak a* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *és* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *konvergens sorok. Ekkor fennáll a következő összefüggés:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor n-edik részletösszege,

$$t_n := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

a $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ sor n-edik részletösszege, továbbá

$$v_n := (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)$$

a $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)$ sor n-edik részletösszege. Ekkor v_n felírható a következőképp:

$$v_n = s_n + t_n.$$

A határértékképzés és összeadás között fennálló összefüggést felhasználva adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

□

Az előbbi állítás azt jelenti, hogy (véges összegekhez hasonlóan) konvergens végtelen sorokat lehet tagonként összeadni.

1.6. Definíció. Egy $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor zárójelezésén a $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=n_{i-1}}^{n_i} a_n\right)$ alakú sorokat értjük, ahol $1 = n_0 < n_1 < \ldots$ az indexek egy tetszőleges monton növő sorozata.

1.7. Állítás. *Ha egy sor konvergens, akkor a sor bármely zárójelezés mellett is konvergens marad, és összege változatlan.*

Bizonyítás. Jelölje

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ konvergens sor n-edik részletösszegét. További zárójelek hozzáadásával (s_n) egy (s_{n_k}) részsorozatát nyerjük. Mivel a sorunk konvergens, így

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = A,$$

tehát a zárójelezés után nyert sor is konvergens és összege megegyezik az eredeti sor összegével. □

Az 1.7 Állítás segítségével is könnyen beláthatjuk, hogy az

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

sor nem konvergens. Korábban ugyanis láthattuk, hogy kétféle összeget is kaphattunk rá eltérő zárójelezésekkel, 1-et, illetve 0-t. Ez azt jelenti, hogy az összege nem maradt változatlan, így a sor nem lehet konvergens.

Fontos megjegyezni, hogy az 1.7 Állítás csak akkor igaz, ha zárójeleket teszünk be. Ha viszont elhagyunk zárójeleket, akkor az már változtathat a konvergencián vagy az összegen. Például vegyük az alábbi végtelen összeget:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots .$$

Evidens, hogy ez konvergens, és összege 0. Most pedig hagyjuk el a zárójeleket, így a fenti

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

alakú sort kapnánk, amely divergens.

1.4. Kritériumok sorok konvergenciájára

Ebben a fejezetben a legismertebb, és a gyakorlatban leginkább alkalmazható konvergenciakritériumokat ismertetjük.

A következő tételt triviális kritériumnak nevezzük, egy szükséges feltétel a konvergenciához, viszont nem elégséges.

1.8. Tétel (triviális kritérium)**.** *Ha* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *konvergens sor, akkor* $a_n \to 0$ *teljesül.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy

$$a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}.$$

Mivel a sor konvergens, így a definícióból adódóan (s_n), illetve (s_{n-1}) egyazon véges összeghez tartanak, ha $n \to \infty$. Ebből pedig adódik, hogy $a_n \to 0$. $\square$

Nézzünk egy ellenpéldát, hogy miért nem igaz a tétel visszafele is. Tekintsük a következőképp definiált sorozatból alkotott sort:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Evidens, hogy $a_n \to 0$, ennek ellenére mégsem konvergens a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor, hiszen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Ez pedig $n \to \infty$ esetén végtelenhez tart, ami azt jelenti, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor nem konvergens.

A következő tételek nemnegatív sorokra érvényesek, ezek az úgynevezett majoráns-minoráns kritériumok, amelyeket talán a leggyakrabban alkalmazhatunk a középiskolai versenyfeladatok megoldásában.

1.9. Tétel (majoráns kritérium)**.** *Adott* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *nemnegatív konvergens sor, és tegyük fel, hogy* $a_i \geq b_i \geq 0$ *minden* i*-re. Ekkor a* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *nemnegatív sor is konvergens.*

Bizonyítás. A $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens, így a hozzá tartozó (s_n) részletösszeg-sorozat is konvergens, tehát korlátos. A feltételek miatt továbbá

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Itt n-nel végtelenhez tartva adódik, hogy a (b_n) sorozat minden részletösszege felülről korlátos egy n-től független véges értékkel. Mivel (b_n) nemnegatív tagú, ezért a részletösszeg sorozata monoton nő, következésképpen $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ is konvergens. $\square$

1.10. Tétel (minoráns kritérium)**.** *Adott* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *nemnegatív divergens sor, továbbá fennáll, hogy* $a_i \geq b_i \geq 0$ *minden* i*-re. Ekkor a* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *nemnegatív sor is divergens.*

Bizonyítás. A $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ sor divergens, emiatt a hozzá tartozó részletösszegek sorozata is divergens, továbbá a feltételek miatt fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Ha n tart végtelenhez, akkor az egyenlőtlenség jobb oldala végtelenhez tart, így adódik, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor is divergens. □

A következő kritérium egy elégséges feltételt ad a konvergenciára. A tétel neve a híres, sorokkal is foglalkozó matematikus, Leibniz nevét viseli.

1.11. Tétel (Leibniz-kritérium)**.** *Adott egy* (a_n) *pozitív tagú, monoton csökkenő sorozat, amelyre* $a_n \to 0$ *teljesül. Ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *(alternáló) sor konvergens.*

Bizonyítás. Jelöljük s_n-nel a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor n-edik részletösszegét. A feltételek szerint $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$. Mivel (a_n) pozitív tagokból áll és monoton csökkenő, így adódik, hogy

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n-2} \leq s_{2n-2},$$

tehát

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n-1} \leq s_{2n} \leq s_{2n-2} \leq \ldots \leq s_2.$$

Innen látható, hogy (s_{2n-1}) monoton növekvő és felülről korlátos, illetve (s_{2n}) monoton csökkenő és alulról korlátos, ami azt jelenti, hogy mindkettő konvergens. Használjuk fel most, hogy $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$, ebből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Innen pedig már adódik, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens. □

1.12. Tétel (Kondenzációs kritérium)**.** *Legyen* (a_n) *monoton csökkenő, nemnegatív tagú sorozat. Ekkor a* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha a* $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot a_{2^i}$ *sor konvergens.*

Bizonyítás. Jelölje
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor n-edik részletösszegét, illetve
$$S_n = 2 \cdot a_2 + 2^2 \cdot a_{2^2} + \ldots + 2^n \cdot a_{2^n}$$
a $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot a_{2^i}$ sor n-edik részletöszegét. Mivel (a_n) monoton csökkenő és nemnegatív tagú, így fennáll, hogy
$$a_{2^n} \geq a_i \quad \text{minden } i > 2^n \text{ esetén.}$$
Ebből adódóan érvényes a következő egyenlőtlenség:
$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n \cdot a_{2^n} = S_n - S_{n-1},$$
tehát
$$\sum_{k=1}^{n} \left(s_{2^{k+1}} - s_{2^k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(S_k - S_{k-1}\right).$$
A fenti egyenlőtlenség mindkét oldala egy-egy teleszkopikus összeg (vagyis olyan összeg, melynek az első és utolsó kivételével minden tagja kiesik), így kapjuk, hogy
$$s_{2^{n+1}} - s_2 \leq S_n - S_0 = S_n.$$
Azaz, ha $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot a_{2^i}$ konvergens, akkor (S_n) felülről korlátos, ezért a fenti egyenlőtlenségből következően (s_n) is, amely ezenkívül monoton növő, mert nemnegatív tagú az (a_n) sorozat. Emiatt (s_n) konvergens, így adódik, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ is konvergens.

Az (a_n) sorozatra továbbá fennáll az is, hogy
$$a_{2^n} \leq a_i \quad \text{minden } i \leq 2^n \text{ esetén.}$$
Ezt felhasználva pedig a következő egyenlőtlenséget kapjuk:
$$2^n \cdot a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}} = s_{2^{n+1}} - s_{2^n}.$$
Szorozzuk be az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel, ekkor
$$S_{n+1} - S_n = 2^{n+1} \cdot a_{2^{n+1}} \leq 2 \cdot (s_{2^{n+1}} - s_{2^n}),$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} (S_{k+1} - S_k) \leq 2 \sum_{k=1}^{n} (s_{2^{k+1}} - s_{2^k}) \, .$$

A fenti egyenlőtlenség mindkét oldala egy-egy teleszkopikus összeg, így kapjuk, hogy

$$S_{n+1} - S_1 \leq 2 \cdot (s_{2^{n+1}} - s_2).$$

Ha tehát $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergens, akkor (s_n) felülről korlátos, ezért a fenti egyenlőtlenségből következően (S_n) is, amely ráadásul monoton növő, mert nemnegatív tagú az (a_n) sorozat. Emiatt (S_n) konvergens, így a $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot a_{2^i}$ sor is. $\square$

2. fejezet

Néhány érdekes végtelen sor

Ebben a fejezetben néhány fontos és érdekes végtelen sort (és alkalmazásait) mutatunk be. Szó lesz a mértani sorról, a harmonikus sorról, a négyzetszámok reciprokösszegéről, valamint a hiperharmonikus sorokról és a 9-es számjegyet nem tartalmazó pozitív egész számok reciprokösszegéről.

2.1. A mértani sor

A mértani sor az egyik legismertebb speciális esete a végtelen soroknak, már az ókori görögöknél gyakran felbukkant, ahogy erről az 1. fejezetben Zénon és Arisztotelész kapcsán utaltunk. Jellemzője, hogy bármely tagját elosztva az előtte állóval, mindig ugyanazt a hányadost kapjuk.

2.1. Definíció. A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ alakú sort mértani (vagy más néven geometriai) sornak nevezzük.

Most pedig vizsgáljuk meg ezen sor konvergenciáját! A sor n-edik részletösszege $q \neq 1$ esetén:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

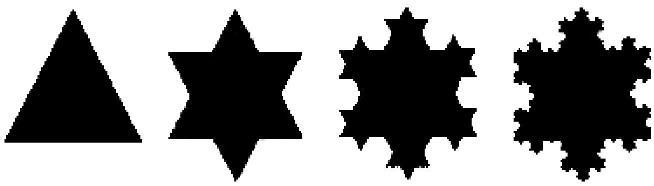
Ha $q = 1$, akkor $s_n = n$, ami $n \to \infty$ esetén ∞-hez tart, ezért a sor összege ∞. Mivel $|q| < 1$ esetén $q^{n+1} \to 0$ és $|q| \geq 1$ esetén q^{n+1} divergens, ezért $s_n \to \frac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$. Ezek alapján megfogalmazható a következő tétel.

2.2. Tétel. *A* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *alakú mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $|q| < 1$, *és ekkor összege* $\frac{1}{1-q}$.

2.2. A Koch-féle hópehely kerülete és területe

Ebben a részben a mértani sorok alkalmazását láthatjuk egy speciális alakzat, a Koch-féle hópehely kerületével, és területével kapcsolatban.

2.3. Definíció. Tekintsünk egy szabályos háromszöget, majd harmadoljuk az oldalait, és a középső szakaszok fölé építsünk szabályos háromszögeket, ezután hagyjuk el a háromszögek alatti szakaszokat. A következő lépésben harmadoljuk az összes szakaszt, és ismét szabályos háromszögeket rajzolunk a középső szakaszok fölé, majd töröljük a most rajzolt háromszögek alatti szakaszokat. Ezt a konstrukciót végtelen sokszor ismételjük, az így keletkezett alakzatot nevezzük Koch-féle hópehelynek (lásd a 2.1 ábrát).



2.1. ábra.

Most, hogy definiáltuk a Koch-féle hópehely fogalmát, vizsgáljuk meg a kerületét. Az oldalhosszak minden lépésnél a harmadukra csökkennek, az oldalak száma pedig mindig négyszeresére nő. Feltesszük, hogy a kezdeti szabályos háromszögünk egység oldalhosszúságú, így az n-edik lépés után kapott alakzat kerülete $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, amely $n \to \infty$ esetén végtelenhez tart.

A terület meghatározásához jelöljük T_n-nel az n-edik lépés utáni alakzat területét. A kezdeti szabályos háromszög T_0, amelynek területe

$$T_0 = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A következő lépésben 3 darab $\frac{1}{3}$ oldalhosszúságú szabályos háromszöggel bővül az alakzatunk, ezért a területe

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{9}.$$

Vegyük észre, hogy ezt követően minden lépésnél az eddigi területet 4-szer több kis háromszöggel bővítjük, mint az azt megelőző lépésben tettük, és ezek oldalhossza harmada az előző lépésbeli kis háromszögeknek, így T_n felírható a következőképp:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{9} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{9^2} \cdot 4 + \ldots + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{9^n} \cdot 4^{n-1} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{9}\left(1 + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right]. \end{aligned}$$

A kerek zárójelben $n \to \infty$ esetén egy mértani sort kapunk, amelyre $q = \frac{4}{9}$, így a hópehely területe

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{5}.$$

Látható tehát, hogy a Koch-féle hópehely egy nagyon különleges alakzat, amelynek kerülete végtelen, területe viszont véges. Megjegyezzük, hogy az előbbiekben nem foglalkoztunk a kerület és terület matematikailag pontos meghatározásával, csupán a szemléletre hagyatkozva „számoltuk ki" a hópehely kerületét és területét.

2.3. A harmonikus sor

Ebben a fejezetben a harmonikus sorral foglalkozunk.

2.4. Definíció. Harmonikus sornak nevezzük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

alakú sort.

A sor elnevezése onnan adódik, hogy bármely tagja előáll az őt megelőző és őt követő tagok harmonikus közepeként:

$$\frac{2}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{n-1}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{n+1}}} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

A harmonikus sor részletösszegei az n növelésével nagyon lassan növekednek. Például ahhoz, hogy a részletösszeg meghaladja az 5-öt, legalább 83 tagot kell összeadni; ahhoz pedig, hogy meghaladja a 10-et, 12 367 tagot kell összeadni. A lassú növekedés ellenére a részletösszegek mégis a végtelenhez tartanak.

2.5. Tétel. *A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.*

Bizonyítás. Tekintsük a részletösszeg következő zárójelezését:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right).$$

Vegyük észre, hogy így minden kerek zárójelben levő összeg nagyobb, mint $\frac{1}{2}$, ezáltal az összeget alulról becsülhetjük a következőképpen:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right) \geq 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Világos, hogy az előbbi egyenlőtlenség jobb oldala $n \to \infty$ esetén végtelenhez tart, így a minoráns kritériumot felhasználva adódik, hogy az egyenlőtlenség bal oldala is végtelenhez tart, azaz a harmonikus sor divergens. □

Ennek a tételnek nemcsak az analízis területén van fontos szerepe, hanem például számelméleti jelentősége is van, hiszen ennek segítségével is belátható, hogy végtelen sok prímszám létezik. Nézzük is ennek bizonyítását a harmonikus sorok segítségével!

Tegyük fel indirekt, hogy csak véges sok prímszám van, legyenek ezek $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Minden i-re és n-re fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \ldots + \frac{1}{p_i^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{p_i}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{p_i}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}.$$

Kihasználva, hogy minden i-re igaz ez az összefüggés, adódik, hogy

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^n}\right)<\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán minden olyan pozitív egész szám reciprokát megkapjuk, amelynek prímtényezős felbontásában minden prím kitevője legfeljebb n, következésképpen minden, $N=p_1^n\cdot\ldots\cdot p_k^n$-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész szám reciprokát megkapjuk, azaz

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\leq\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^n}\right)<\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.$$

Ekkor azonban ellentmondásra jutunk, hiszen ha $n\to\infty$, akkor $N\to\infty$, és így, mint korábban beláttuk, a bal oldal tart végtelenhez, hiszen ez egy harmonikus sor, a jobb oldal viszont egy rögzített érték.

Látható tehát, hogy a végtelen soroknak akár geometriai (Koch-féle hópehely), akár számelméleti alkalmazásuk (végtelen sok prímszám létezése) is lehet.

2.4. Négyzetszámok reciprokainak összege

Ebben a fejezetben a pozitív egész számok négyzeteinek reciprokaiból álló sorral foglalkozunk:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\,.$$

A sor részletösszegeit vizsgálva látható, hogy az 1,7-et már nem nagyon tudjuk „elérni”, például 1 millió tagra 5 tizedesjegyig megközelítőleg $1,64493$-at kapunk eredményül. Sejtésünk tehát az, hogy a sor konvergens.

E sor összegének pontos meghatározása a híres bázeli probléma. A kérdéses összeget elsőként Pierre Mengoli (1626–1686) vetette fel a XVII. század közepén. Jakob Bernoulli (1654–1705) számos hasonló sor összegét ki tudta számolni, de a fenti végtelen sor összegének meghatározásával nem boldogult. Bernoulli 1691-ben rájött, hogy az összeg nem racionális. A pontos összeget először Leonhard Eulernek sikerült meghatároznia: 1736-ban megállapította, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor összege $\frac{\pi^2}{6}$. Az alábbiakban egy elegáns bizonyítást mutatunk erre az összefüggésre, amely a [6] könyvből származik.

2.6. Tétel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bizonyítás. A tétel igazolásához tekintsük a következő határozott integrált:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \; dt. \tag{2.1}$$

Első lépésként teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \; dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{2.2}$$

ahol

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n, \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

az úgynevezett szemifaktoriálisok, továbbá $(0)!! = 1$ és $(-1)!! = 1$ definíció szerint.

Az $n = 1$ esetben a (2.2) összefüggés azt jelenti, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot 1} t \; dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} \; dt = \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} = \frac{(2\cdot 1-1)!!}{(2\cdot 1)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

tehát $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra is igaz, azaz teljesül az alábbi összefüggés:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t \; dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{2.3}$$

Most pedig ezt felhasználva belátjuk, hogy $n = k + 1$-re is teljesül. Ennek érdekében végezzük el az alábbi átalakításokat.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} t \; dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t \cdot \cos t \; dt = \\ &= \left[\sin t \cdot \cos^{2k+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t \cdot (1 - \cos^2 t) = \\ &= -(2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} t \; dt + (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t \; dt.\end{aligned}$$

Azt az egyenlőséget kaptuk tehát, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} t \ dt = -(2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} t \ dt + (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t \ dt.$$

Ebből következően

$$(2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} t \ dt = (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t \ dt.$$

Most felhasználjuk a (2.3) indukciós feltevést, így

$$(2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} t \ dt = (2k+1) \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

tehát

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2} t \ dt = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ezzel beláttuk a (2.2) állítást.

Most alakítsuk át a (2.1) kifejezést, mégpedig parciálisan integráljuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \ dt = \Big[t \cdot \cos^{2n} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot 2n \cdot \cos^{2n-1} t \cdot (-\sin t) \ dt =$$
$$= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos^{2n-1} t \cdot \sin t \ dt.$$

A következő lépésben ismét parciálisan integrálunk:

$$\begin{aligned} &2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos^{2n-1} t \cdot \sin t \ dt = \\ &= n \Big[t^2 \cdot \sin t \cdot \cos^{2n-1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \\ &\quad - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 \cdot \cos^{2n} t - t^2 (2n-1) \cdot \cos^{2n-2} t \cdot (1-\cos^2 t)) \ dt. \end{aligned}$$

Elvégezve az integráljelen belüli zárójel felbontását és az azonos tagok összevonását

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \ dt = -2n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \cos^{2n} t \ dt + n\,(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \cos^{2n-2} t \ dt.$$

Vezessünk be egy új jelölést, legyen

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \cos^n t \ dt.$$

Ennek segítségével a (2.1) integrál kifejezhető a következő alakban:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, dt = -2n^2 \cdot J_{2n} + n\,(2n-1) \cdot J_{2n-2}.$$

A (2.2) állítást felhasználva adódik, hogy

$$-2n^2 \cdot J_{2n} + n\,(2n-1) \cdot J_{2n-2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

azaz

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} J_{2n} - \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} J_{2n-2} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Ebből következően

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} J_{2k} - \frac{(2k-2)!!}{(2k-3)!!} J_{2k-2} \right] = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} J_{2n} - \frac{(0)!!}{(-1)!!} J_0 =$$
$$= -\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Fejtsük ki J_0-t:

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \cos^0 t \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

Visszahelyettesítve:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} J_{2n} - \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^3}{24} = -\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

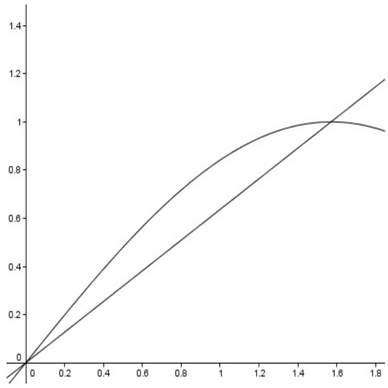
vagyis

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} J_{2n} = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right]. \tag{2.4}$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy az így kapott egyenlőség bal oldala 0-hoz tart. Ehhez a következő becslést használjuk fel:

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mivel a sin függvény konkáv a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon, ezért a $\sin x$ grafikonja a $(0,0)$ és $(\frac{\pi}{2}, 1)$ pontokat összekötő húr fölött helyezkedik el, tehát valóban $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ (lásd a 2.2 ábrát).



2.2. ábra.

Így adódik, hogy

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \cos^{2n} t \; dt \le \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^{2n} t \; dt = \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \; dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \; dt \right] = \\ &= \frac{\pi^3}{8} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right] = \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}. \end{aligned}$$

Ezt figyelembe véve, a (2.4) egyenlőség bal oldala a következőképpen becsülhető:

$$0 < \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} J_{2n} \le \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{1}{2n+2}.$$

A felső becslés $n \to \infty$ esetén 0-hoz tart, ami azt jelenti, hogy a (2.4) egyenlőség jobb oldala is 0-hoz tart, ebből következően pedig adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

2.5. Hiperharmonikus sorok

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy mely α valós számokra konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \tag{2.5}$$

alakú, úgynevezett hiperharmonikus sor. Korábban láthattuk, hogy például $\alpha = 1$-re divergens, de $\alpha = 2$-re konvergens volt. Most azt állítjuk, hogy a (2.5) alakú sor konvergens, ha $\alpha > 1$, viszont divergens, ha $\alpha \leq 1$.

2.7. Állítás. *A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ alakú sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.*

Az állításra két bizonyítást adunk.

Első bizonyítás. Először az $\alpha > 1$ esetén fennálló konvergenciát látjuk be. Vegyük a (2.5) alakú sor n-edik részletösszegét:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}.$$

Azt kell belátnunk, hogy a részletösszeg-sorozata konvergens. Evidens, hogy (s_n) monoton növő, így már csak azt kell igazolni, hogy felülről korlátos.

Tekintsük a következőképp definiált sorozatot:

$$b_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ekkor

$$b_n = 1 + \left(-\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha}\right) + \ldots < 1.$$

Másrészt b_{2n} kifejezhető az alábbi alakban:

$$b_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = s_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} s_n.$$

Felhasználva az előző egyenlőséget, és azt, hogy (a_n) monoton növő, illetve $b_n < 1$, azt kapjuk, hogy

$$s_n - \frac{2}{2^\alpha} s_n < s_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} s_n = b_{2n} < 1.$$

Ebből $\alpha > 1$ miatt következik, hogy

$$s_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2} < \infty.$$

Azaz (s_n) felülről korlátos, illetve monoton növő, így konvergens.

Ha $\alpha = 1$, akkor a harmonikus sort kapjuk, amelyről már korábban beláttuk, hogy divergens, így már csak az $\alpha < 1$ esetet kell vizsgálni. Ez esetben a következő alsó becslést alkalmazhatjuk:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén a fenti egyenlőtlenség jobb oldala is végtelenhez tart, így a (2.5) alakú hiperharmonikus sor is divergens. $\square$

Nézzünk most egy másik bizonyítást a 2.7 Állításra, amelyben felhasználjuk a kondenzációs kritériumot.

Második bizonyítás. A kondenzációs kritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ akkor és csak akkor konvergens, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha}$$

alakú sor is konvergens. Ez a sor pedig átalakítható egy mértani sorrá a következőképpen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n .$$

Itt $\alpha > 1$ esetén adódik, hogy $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, azaz ez egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sor, amely konvergens. Ha $\alpha \leq 1$, akkor az iménti mértani sor divergens, ezért az eredeti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor is az. $\square$

2.6. A 9-es számjegyet nem tartalmazó harmonikus sor

Korábban beláttuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

alakú harmonikus sor divergens. Ebben a szakaszban a harmonikus sor egy „ritkítását” vizsgáljuk, méghozzá a

$$\sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{88} + \ldots + \frac{1}{10^k} + \ldots + \frac{1}{8\ldots8} + \ldots \quad (2.6)$$

alakú sort, azaz a 9-es számjegyet nem tartalmazó pozitív egész számok reciprokösszegét.

2.8. Állítás. *A* $\sum_{9\notin n} \frac{1}{n}$ *alakú sor konvergens.*

Bizonyítás. A (2.6) összegben levő tagok megfelelően csoportosítva különkülön felülről becsülhetőek az alábbi módon:

$$\begin{gathered}
1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{8} \leq 1+1+\ldots+1=8, \\
\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{88} \leq \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10}=8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10}, \\
\vdots \\
\frac{1}{10^k}+\frac{1}{10^k+1}+\ldots+\frac{1}{8\ldots 8} \leq \frac{1}{10^k}+\frac{1}{10^k}+\ldots+\frac{1}{10^k}=8 \cdot 9^k \cdot \frac{1}{10^k}, \\
\vdots
\end{gathered}$$

Ezáltal adódik, hogy

$$\sum_{9\notin n} \frac{1}{n} \leq 8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k .$$

Ezen egyenlőtlenség jobb oldala egy mértani sor, amelynek kvóciense $\frac{9}{10} < 1$, azaz konvergens, így az egyenlőtlenség bal oldala is konvergens, és összege legfeljebb $8 \cdot \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 80$. □

2.9. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy bármelyik másik számjegyet tartalmazó számokat elhagyva is konvergens sort kapunk, így megállapítható az is, hogy a harmonikus sor divergenciáját azok a számok okozzák, amelyek mindegyik számjegyet tartalmazzák (ilyen szám például az 1023456789).

A fenti sorral egyébként először Aubrey J. Kempner (1880–1973) foglalkozott 1914-ben, így Kempner-sornak is nevezik. Kempner bizonyította elsőként a 2.8 Állítást is, miszerint a sor konvergens, és összege legfeljebb 80. Ezt követően, 1916-ban Frank Irwin (1868–1948) igazolta, hogy a Kempner-sor értéke 22.4 és 23.3 között van, ami már jóval pontosabb becslés, mint amit Kempner tudott adni. Később, 1979-ben Robert Baillie belátta, hogy a 9-es számjegyet nem tartalmazó harmonikus sor értéke az első 20 tizedesjegyéig 22.92067 66192 64150 34816.

3. fejezet

Érdekes összegek versenyfeladatokban

Ebben a részben néhány olyan versenyfeladatot oldunk meg, amelyekben érdekes összegek fordulnak elő.

3.1. KöMaL B. 4019.

Az alábbi feladat a Középiskolai Matematikai Lapok 2008. márciusi számában található.

Feladat. Bizonyítsd be, hogy minden n pozitív egész számra

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}. \tag{3.1}$$

Első megoldás. Alakítsuk át a kifejezést az alábbi módon:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+1)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2+4i+1}.$$

Ezután egy olyan felső becslést célszerű keresni, amelyről már be tudjuk látni, hogy $\frac{1}{4}$-nél kisebb. Vegyük például az alábbi becslést:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2+4i+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2+4i}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\,(i+1)}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

Az így kapott felső becslés kisebb, mint $\frac{1}{4}$, hiszen $1 - \frac{1}{n+1} < 1$ minden n pozitív egészre. Ezzel bizonyítottuk is a feladatban szereplő egyenlőtlenséget. $\square$

Második megoldás. Most felhasználjuk a korábban belátott 2.6 Tételt, miszerint
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{3.2}$$
Mivel n növelésével a (3.1) összeg értéke nő, így biztosan jó felső becslés minden n-re a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ végtelen összeg. Ennek az értékét fejezzük ki, felhasználva a (3.2) összefüggést. Először is vegyük észre, hogy
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$
Mivel
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24},$$
így adódik, hogy
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$
Ezt felhasználva pedig a (3.1) összeg becsülhető az alábbi módon:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1 \approx 0,2337 < \frac{1}{4}.$$
$\square$

Megjegyezzük, hogy a második megoldás a (3.2) összefüggés használata miatt nem tekinthető eleminek, inkább csak arra jó, hogy egy jobb felső becslést kaptunk a feladatban szereplő összegre.

3.2. OKTV 1988/1989

Az alábbi feladat az 1988/89-es tanévi OKTV II. kategóriája (általános tantervű gimnáziumok) döntő fordulójának 3. feladata.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszés szerinti, 3-nál nem kisebb pozitív egész számot jelöl, akkor

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}.$$

Első megoldás. Írjuk át az egyenlőtlenség bal oldalát a következő alakra:

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3}.$$

Mivel azt kell igazolnunk, hogy az összeg kisebb, mint $\frac{1}{12}$, ezért egy olyan felső becslést érdemes keresnünk, melynek összegét már meg tudjuk határozni, de arra is ügyelnünk kell, hogy a felső becslésünk ne legyen túl nagy. Egy jó becslés például a következő:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3 - k}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3 - k} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}. \tag{3.3}$$

Az összeg egy tagját alakítsuk tovább a következőképpen:

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \frac{(k+1) - (k-1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right). \tag{3.4}$$

Ebből következően kapjuk, hogy

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right).$$

Mivel a jobb oldalon egy teleszkopikus összeg áll, amelynek az első és az utolsó kivételével minden tagja kiesik, így

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) < \frac{1}{12}.$$

$\square$

Második megoldás. Most nézzünk egy olyan megoldást, amely a (3.3) kifejezés átalakításában tér el. Ekkor nem kell észrevennünk azt, hogy a (3.3) összeg egy általános tagja átalakítható a (3.4) alakra, hanem a parciális törtekre bontás módszerét alkalmazzuk. Keressünk olyan A, B, C valós számokat, amelyekre minden $k > 1$ esetén

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k} + \frac{C}{k+1}. \tag{3.5}$$

Hozzuk közös nevezőre a (3.5) kifejezés jobb oldalát:

$$\begin{aligned}\frac{A(k+1)k + B(k-1)(k+1) + C(k-1)k}{(k-1)k(k+1)} &= \\ = \frac{k^2(A+B+C) + k(A-C) - B}{(k-1)k(k+1)}&.\end{aligned}$$

Ekkor a számlálónak 1-nek kell lennie, innen kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A - C &= 0 \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Ezt megoldva adódik, hogy $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. A kapott értékeket visszahelyettesítve a (3.5) kifejezésbe, majd rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

Eszerint

$$\begin{aligned}&\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)}\right) < \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Ezzel ismét megkaptuk a bizonyítandó állítást. □

3.3. OKTV 2011/2012

Az alábbi feladat a 2011/2012-es tanévi OKTV II. kategóriájának (általános tantervű gimnáziumok) döntő fordulójában szerepelt.

Feladat. Legyen $h(1) = 1$ és $n = 2, 3, \dots$ esetén $h(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Mutassuk meg, hogy

$$L = \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{2 \cdot h^2(2)} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot h^2(2012)} < 2. \tag{3.6}$$

Megoldás. Könnyen látható, hogy a $h(n)$ sorozat szigorúan monoton növő, ezért $k \geq 2$ esetén érvényes a következő becslés:

$$\frac{1}{k \cdot h^2(k)} \leq \frac{1}{k \cdot h(k-1) \cdot h(k)} = \frac{\frac{1}{k}}{h(k-1) \cdot h(k)} = \frac{h(k) - h(k-1)}{h(k-1) \cdot h(k)} = \\ = \frac{1}{h(k-1)} - \frac{1}{h(k)}.$$

Ezt az összefüggést $k = 2$-től n-ig összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot h^2(k)} \leq \\ \leq \left(\frac{1}{h(1)} - \frac{1}{h(2)}\right) + \left(\frac{1}{h(2)} - \frac{1}{h(3)}\right) + \dots + \left(\frac{1}{h(n-1)} - \frac{1}{h(n)}\right) = \\ = \frac{1}{h(1)} - \frac{1}{h(n)}.$$

Ezt a (3.6) egyenlőtlenségbe visszahelyettesítve, illetve felhasználva, hogy $h(1) = 1$, a következő becslést nyerjük:

$$L = \frac{1}{h^2(1)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot h^2(k)} \leq \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{h(1)} - \frac{1}{h(n)} < \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{h(1)} = 2.$$

Ezzel igazoltuk a feladatban szereplő egyenlőtlenséget. □

Vegyük észre, hogy a megoldásban valójában igazoltuk a következő állítást is (lásd [1]).

3.1. Állítás. *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat, valamint részletösszeg-sorozata $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ekkor*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^2} \leq \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_n} < \frac{1}{D_1}.$$

3.4. OKTV 1985/1986

A következő feladat az 1985/1986. tanévi OKTV IV. kategóriájának egyik döntő fordulós feladata.

Feladat. Az (u_n) Fibonacci-sorozat definíciója:

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \quad \text{és} \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Igazolja, hogy a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_{2^k}}$ sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

Megoldás. A Fibonacci-sorozat n-edik tagja [2] alapján kifejezhető a következőképpen:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(a^n - b^n \right),$$

ahol a és b az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei, így a Viète-formulát felhasználva adódik, hogy $ab = -1$, azaz $b = -\frac{1}{a}$. Ezt felhasználva

$$u_{2^k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(a^{2^k} - \frac{1}{a^{2^k}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a^{2^{k+1}} - 1}{a^{2^k}}.$$

Vegyük a fenti egyenlőség reciprokát,

$$\frac{1}{u_{2^k}} = \sqrt{5} \cdot \frac{a^{2^k}}{a^{2^{k+1}} - 1},$$

majd alakítsuk tovább a következőképpen:

$$\sqrt{5} \cdot \frac{a^{2^k}}{a^{2^{k+1}} - 1} = \sqrt{5} \cdot \frac{a^{2^k}(a^{2^k} - 1)}{(a^{2^{k+1}} - 1)(a^{2^k} - 1)} = \sqrt{5} \cdot \frac{(a^{2^{k+1}} - 1) - (a^{2^k} - 1)}{(a^{2^{k+1}} - 1)(a^{2^k} - 1)} =$$
$$= \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{a^{2^k} - 1} - \frac{1}{a^{2^{k+1}} - 1} \right).$$

Ebből következően a vizsgált összeg felírható az alábbi módon:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_{2^k}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{a^{2^k} - 1} - \frac{1}{a^{2^{k+1}} - 1} \right).$$

Ez pedig egy teleszkopikus összeg, így:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{a^{2^k} - 1} - \frac{1}{a^{2^{k+1}} - 1} \right) = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^{2^{n+1}} - 1} \right).$$

Ha $n \to \infty$, akkor $\frac{1}{a^{2^{n+1}}-1} \to 0$, hiszen $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Továbbá, mivel a az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyöke, emiatt $a^2 = a + 1$ teljesül, ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2^k}} = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{a^2 - 1} = \frac{\sqrt{5}}{a}.$$

Felhasználva azt, hogy $ab = -1$, adódik, hogy $\frac{1}{a} = -b$, emiatt

$$\frac{\sqrt{5}}{a} = -\sqrt{5}b = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2^k}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

□

3.2. Megjegyzés. A Fibonacci-számok reciprokaiból álló sor mindig foglalkoztatta a matematikusokat, és a mai napig vannak nyitott kérdések e témakörben. Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} = 3,359885\ldots$ sor összegének nem ismerjük a zárt alakját. Erdős Pál (1913–1996) vetette fel, hogy egyáltalán racionális, vagy irracionális-e az értéke. 1989-ben Richard André-Jeannin igazolta, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ sor összege irracionális. A fenti OKTV feladatban előforduló sor a Millin-sor. D. A. Millin 1974-ben tűzte ki feladatként a The Fibonacci Quarterly folyóiratban.

3.5. OKTV 2008/2009

A következő feladat az OKTV 2008/2009-es tanéve III. kategóriájú (speciális matematika tantervű gimnáziumok) döntőjének egyik feladata.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tetszőleges pozitív számok, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$ és $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^2} = \infty$ közül legalább az egyik teljesül.

Első megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy $\sum \frac{1}{a_i}$ és $\sum \frac{a_i}{i^2}$ is konvergens. Ebből következően az összegük is konvergens kell, hogy legyen. Végezzük el az alábbi átalakításokat a két sor összegén:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_i}+\frac{a_i}{i^2}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2+a_i^2}{a_i\cdot i^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(a_i-i)^2+2a_i\cdot i}{a_i\cdot i^2}=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(a_i-i)^2}{a_i\cdot i^2}+\frac{2a_i\cdot i}{a_i\cdot i^2}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(a_i-i)^2}{a_i\cdot i^2}+\frac{2}{i}\right).$$

Ezt pedig alulról becsülhetjük a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(a_i-i)^2}{a_i\cdot i^2}+\frac{2}{i}\right)\geq 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i},$$

hiszen

$$\frac{(a_i-i)^2}{a_i\cdot i^2}\geq 0$$

minden $i\geq 1$ esetén. Mivel $2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$, ezért a minoráns kritérium alapján

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_i}+\frac{a_i}{i^2}\right)=\infty.$$

Ez viszont ellentmondásban áll azzal, hogy $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}$ és $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{i^2}$ is konvergens, mert ekkor a két sor összege is konvergens lenne. Így tehát valóban a $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}$ és $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{i^2}$ sorok közül legalább az egyik divergens. □

Második megoldás. Alkalmazzuk most a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget. Eszerint minden i-re

$$\frac{1}{a_i}+\frac{a_i}{i^2}\geq\sqrt{\frac{1}{a_i}\cdot\frac{a_i}{i^2}}=\sqrt{\frac{1}{i^2}}=\frac{1}{i}.$$

Ebből adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_i}+\frac{a_i}{i^2}\right)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty.$$

Innen az első megoldáshoz hasonló érveléssel következik, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}$ és $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{i^2}$ sorok közül legalább az egyik divergens. □

3.6. Péter Rózsa Matematikaverseny 2002

Az alábbi feladat a matematikatanári szakos főiskolásoknak szóló Péter Rózsa Matematikaversenyen szerepelt, a 2002. évi 2. feladat volt (lásd [9]).

Feladat. Adjuk össze a Pascal-háromszög harmadik sorától kezdve minden sor harmadik elemének reciprokát. Konvergens-e az így kapott végtelen sor, és ha igen, mennyi az összege?

Megoldás. A feladatbeli eljárással kapott összeg a következő:

$$\frac{1}{\binom{2}{2}} + \frac{1}{\binom{3}{2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}}.$$

Alakítsuk át az összeg tagjait a következőképpen:

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Ennek segítségével a sor a következő alakra hozható:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} = 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Vegyük észre, hogy ez egy teleszkopikus összeg. Végezzük el az egymást kiejtő tagok összevonását, így a sor k-adik részletösszege:

$$s_k = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \right] = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{k} \right).$$

Ez pedig $k \to \infty$ esetén 2-höz tart, tehát a sor konvergens, és összege 2. □

3.7. Péter Rózsa Matematikaverseny 1995

A következő feladat a tanárképző főiskolák Péter Rózsa Matematikaversenyének 1995. évi 5. feladata volt (lásd [9]).

Feladat. Legyen $a_0 = 5$ és

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bizonyítsuk be, hogy $45 < a_{1000} < 45,1$!

Megoldás. Az (a_n) sorozat helyett célszerűbb a négyzetét vizsgálni. A rekurzió alapján:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 = a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 = \ldots = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k^2} + 2(n+1) + a_0^2.$$

Így a_n^2 felírható a következő módon:

$$a_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k^2} + 2n + 25 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.7}$$

Ebből következően:

$$a_{1000}^2 = 2025 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{a_k^2} > 45^2,$$

és így $a_{1000} > 45$. A másik egyenlőtlenség bizonyításához célszerű tovább vizsgálnunk a $\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{a_k^2}$ összeget. Felhasználjuk, hogy a rekurzióból adódóan (a_n) szigorúan monoton növekedő, így felülről becsülhetjük a következőképpen:

$$\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{a_k^2} = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{a_k^2} + \sum_{k=100}^{999} \frac{1}{a_k^2} < \frac{100}{a_0^2} + \frac{900}{a_{100}^2}.$$

A (3.7) összefüggés segítségével alulról becsülhetjük a_{100} értékét, eszerint

$$a_{100}^2 = 225 + \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{a_k^2} > 225,$$

így kapjuk, hogy

$$\frac{100}{a_0^2} + \frac{900}{a_{100}^2} < \frac{100}{25} + \frac{900}{225} = 8,$$

tehát

$$a_{1000}^2 = 2025 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{a_k^2} < 45^2 + \frac{100}{a_0^2} + \frac{900}{a_{100}^2} < 45^2 + \frac{100}{25} + \frac{900}{225} = 45^2 + 8,$$

vagyis

$$a_{1000} < 45,1.$$

□

3.8. Diákolimpia 1970

A következő feladat az 1970. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 3. feladatának egy részlete (lásd [7]).

Feladat. A valós számokból álló $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat eleget tesz az

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \tag{3.8}$$

egyenlőtlenségláncnak. Felhasználásával a $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}. \tag{3.9}$$

Bizonyítsuk be, hogy a $0 \leq b_n < 2$ egyenlőtlenségpár minden n értékre fennáll.

Megoldás. Felhasználva, hogy az (a_n) sorozat minden tagja nagyobb, mint 1, és (a_n) monoton nő, emiatt $\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq 1$, így $1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \geq 0$. A (b_n) sorozat tehát nemnegatív tagú, hiszen a (3.9) összeg minden tagja nemnegatív.

Tekintsük a (3.9) összeg egy tagját, és alakítsuk át a következőképpen:

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} = \left(1 + \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Vegyük észre, hogy (a_n) monoton növekedése miatt $1 + \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}} \leq 2$, így

$$\begin{aligned}
\left(1 + \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \leq \frac{2}{\sqrt{a_k}}\left(1 - \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) &\leq \\
\leq \frac{2}{\sqrt{a_{k-1}}}\left(1 - \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right) &= \\
= 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)&.
\end{aligned}$$

Az így kapott becslést a (3.9) összeg minden tagjára alkalmazva kapjuk a következő teleszkopikus összeget:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \leq \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2.$$

□

Irodalomjegyzék

[1] Besenyei Ádám - Teleszkopikus összegekről, avagy kalandozások egy versenyfeladat körül I-II., KöMaL, 2012/9, 514-523. és 2013/1, 2-11.

[2] Fibonacci-számok zárt alakjai
(http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html)

[3] KöMaL adatbázis
(http://db.komal.hu/scan/)

[4] Középiskolai matematika versenyek
(http://www.versenyvizsga.hu/hun/index.html)

[5] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera - Analízis II, TypoTEX, Budapest, 2014.

[6] Németh József - Előadások a végtelen sorokról, Polygon, Szeged, 2002.

[7] Reiman István - Nemzetközi matematikai diákolimpiák I. (1959–1994), TypoTEX, Budapest, 1995.

[8] Sikolya Eszter - BSc Analízis I. előadásjegyzet
(http://bolyai.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2009_10_1/BSc_ea/BSc_analizis_I_eloadas.pdf)

[9] Varecza Árpád, Rozgonyi Tibor - A tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikai versenyei IV. (1986–2002), TypoTEX, Budapest, 2003.