A π története

Bécsi Ilona

Szakdolgozat

Matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Besenyei Ádám, egyetemi tanársegéd

Alkalmazott Analízis Tanszék és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Napjainkban rengeteg kör alakú tárgy vesz körül bennünket. Bizonyára már mindenkiben felmerült a kérdés, hogy vajon mennyi is annak a bizonyos körnek a kerülete, illetve területe. Honnan jött, hogy a π értékével számoljunk? Mennyi a π pontos értéke? Ezek a kérdések nemcsak egy matematikust foglalkoztatnak, hanem akár egy hétköznapi embert is, hiszen a mindennapi életben rendszeresen találkozunk kör alakú tárgyakkal, mint például a tányér és a pohár, az utcán a közlekedési jelzőtáblák egyrésze és még lehetne sorolni. Nemrégiben napvilágra kerültek a gravitáció elméletével kapcsolatban új felfedezések, melyben a π is érintett. Felbukkan az elhalálozási statisztikákból ismert Gauss-féle normáleloszlásban, és természetesen a matematikában a terület, kerület, illetve térfogatszámításoknál is. Középiskolai matematika tanulmányainkból a jól ismert képlet a kör kerületére és területére:

$$K = 2r\pi = d\pi,$$

és

$$T = r^2\pi,$$

ahol π a kör kerülete és átmérője közötti arányt fejezi ki. A görög π betű a „perimeter” (kerület) szót rövidíti. Ludolph-féle számnak is nevezik, ugyanis Ludolph van Ceulen volt az, aki minél több tizedesjegyét próbálta meghatározni. A németek a π-t még ma is Ludolph-féle számnak nevezik. A 18. században

Euler ezt az értéket p-vel vagy c-vel jelölte. William Jones angol matematikus használta először a görög π betűt „A matematika új bemutatkozása” című könyvében. Ezt követően mindenhol π-vel jelölik ezt a számot, amelyet Jones valószínűleg az angol periphery (kerület) szóból származtatott. Értéke ötven tizedesjegyig:

$$3,14159265358979323846264338327950288419716939937510.$$

Be fogjuk látni, hogy a π irracionális szám, tizedestört alakja végtelen és periodikusan nem ismétlődik. Mára közel 2,7 billió $(2,7 \cdot 10^{12})$ jegyét számították ki modern számítástechnikai módszerekkel, de a számjegyek között hasonlóságot nem fedeztek fel.

A dolgozat betekintést nyújt a π rejtelmeibe, mind történelmi, mind pedig matematikai szempontból. A következő fejezetben a π történetét az ókortól egészen napjainkig végigtekintjük, Európától Amerikáig. Majd megismerkedhetünk olyan híres matematikusok formuláival, mint Euler, Leibniz, Wallis, Viète, amelyek segítségével meg tudjuk határozni a π-t néhány pontos tizedesjegyig. Végül belátjuk a π irracionalitását.

2. fejezet

A π története

2.1. Egyiptom

A története 10000 esztendővel korábbra nyúlik vissza, eredetéről pontos adatokkal nem rendelkezünk, de annyi megállapítható, hogy a π értékre egy idő után bizonyosan szükség lehetett, így az állandót 3-nak tekintették. Az ókori Egyiptomban is ezt az állandót használták egy ideig, azonban később rájöttek, hogy ez az arány nem pontosan 3, hanem valamivel nagyobb szám. Így felmerült a kör terület kiszámításának problémája. Elméleti geometriai gondolatmenetekkel a papiruszokban nem találkozunk. A feladatok közt szerepel egyenes vonalú síkidomok kerületének kiszámítása, hasáb, henger, gúla, és csonka gúla térfogatának meghatározása. Az i.e. 1660-ból való egyiptomi Rhind-papiruszon található egy képlet a kör területének kiszámítására, amelyet Ahmész királyi írnok írt. A tekercset 1858-ban Henry Rhind skót régiségkereskedő vásárolta meg, a papirusz Rhind halála után a British Museumba került. A hiányzó része 50 év múlva került elő a New York-i Történelmi Társulat gyűjteményéből. Ebben kör területét úgy határozták meg, hogy az átmérő $\frac{8}{9}$-ét négyzetre emelték. Ez mai jelöléssel:

$$T \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

A π értékére tehát az egyiptomi számításból következik, hogy

$$\pi \approx 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3 + \frac{1}{6} \approx 3,16,$$

ami már egész jó közelítés.

2.2. Arkhimédész

Az ókori görögöknél i.e. 8-7. században fellendült a társadalmi élet és kultúra. Ez a korszak jelentős szerepet játszik a tudomány fejlődésében. A matematikában ekkor jelent meg a szám önmagában. Felmerült a görögökben egy fontos kérdés, hogy „miért is kell így csinálni?". A görögök munkái közül az utókor számára nem sok maradt fenn. A görög matematika geometriai jellegű volt. Megjelentek az arányok, felmerült az „összemérhetetlen" mennyiségek fogalma is, ami irracionális arányt jelentett. Az ókori görögök felismerték, hogy a kör területe egy olyan háromszög területével egyezik meg, amelynek alapja a kör kerülete, magassága a kör sugara.

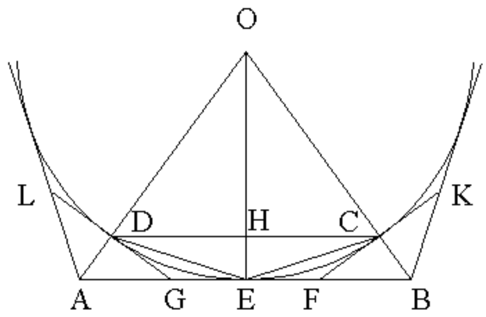
Meg kell említenünk a szicíliai Szürakúzai Arkhimédész (i.e. 287-212) munkásságát, aki rokoni kapcsolatban állt az uralkodóval, így annak udvarában mindent megkapott, hogy életét fizikai, matematikai kutatásainak szentelhesse. Az akkori kultúrközpontban, Alexandriában is megfordult, ahol barátokat szerzett magának.

Arkhimédész kiemelkedő műve a „Módszer" nevű levél, melyre csak 1906-ban bukkant rá Heiberg dán nyelvész Konstantinápolyban, a Jeruzsálemi Szent Sír kolostor könyvtárában. Ebben a művében a szerző matematikai felfedezéseit valamilyen mechanikai kisérlet alapján sejtette meg, és a megsejtett törvényt a matematika teljes szigorával igazolta.

„A gömbről és a hengerről" szóló értekezésében az általa megfogalmazott axiómákra támaszkodva határozta meg az egyenes henger, az egyenes kör kúp, valamint a gömb felszínét és térfogatát. A számításaiban kétoldali közelítést használt, és megállapította, hogy az egyenlő oldalú henger, a beleírható gömb és az egyenes körkúp térfogata úgy aránylanak egymáshoz, mint

3:2:1. Ezt az eredményt fejezte ki a sírkövére vésett ábra is.

„A körmérésről” című írásában a körbe írt szabályos sokszögek segítségével közelítette meg a kör kerületét és területét. Ebben a művében egy igen szép gondolatmenet található a π közelítő értékének a meghatározására. Célját egy 96 oldalú szabályos sokszög kerületének kiszámolásával érte el.



2.1. ábra.

Az 2.1. ábrán látható: r sugarú k körbe írt, szabályos n oldalú sokszög egy középponti háromszöge, DCO, és a kör köré rajzolt szabályos n-szög egy középponti háromszöge, ABO. A beírt sokszög egy oldalát a_n-nel, a körülírt sokszög egy oldalát pedig A_n-nel jelöljük. Az ábrán látható még a beírt és körülírt szabályos $2n$ oldalú sokszög egy részlete is. Ekkor a következőket mondhatjuk:

$$DC = a_n; \quad AB = A_n; \quad DE = EC = a_{2n}; \quad GF = FK = A_{2n}.$$

A BCF és BEO háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{A_{2n}}{2} : \frac{A_n - A_{2n}}{2} = r : OB,$$

ezért

$$A_{2n} : (A_n - A_{2n}) = r : OB. \tag{2.1}$$

A BEO és CHO hasonlósága miatt

$$\frac{a_n}{2} : \frac{A_n}{2} = r : OB,$$

azaz

$$a_n : A_n = r : OB. \tag{2.2}$$

A (2.1) és (2.2) aránypárból következően

$$A_{2n} : (A_n - A_{2n}) = a_n : A_n,$$

vagyis

$$\frac{A_{2n}}{A_n - A_{2n}} = \frac{a_n}{A_n},$$

ahonnan

$$A_{2n} = \frac{a_n A_n}{a_n + A_n}. \tag{2.3}$$

A CED és CFE háromszögek hasonlósága miatt

$$a_n : a_{2n} = a_{2n} : \frac{A_{2n}}{2},$$

azaz

$$\frac{a_n}{a_{2n}} = \frac{2 \cdot a_{2n}}{A_{2n}},$$

ahonnan

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{a_n \cdot A_{2n}}{2}}. \tag{2.4}$$

A sokszögek kerületei tehát

$$k_n = na_n; \quad K_n = nA_n; \quad k_{2n} = 2na_{2n}; \quad K_{2n} = 2nA_{2n}.$$

A (2.3) és (2.4) összefüggések figyelembevételével

$$K_{2n} = 2nA_{2n} = \frac{2na_n nA_n}{na_n + nA_n} = \frac{2k_n K_n}{k_n + K_n},$$

és

$$k_{2n} = 2n \cdot \sqrt{\frac{a_n \cdot A_{2n}}{2}} = \sqrt{\frac{4n^2 a_n A_{2n}}{2}} = \sqrt{2na_n nA_{2n}} = \sqrt{k_n K_{2n}}.$$

A kerületekből és az oldalszámok további duplázásával keletkezett sokszögek kerületeiből egy sorozat állítható elő:

$$K_n; \quad k_n; \quad K_{2n}; \quad k_{2n}; \quad K_{4n}; \quad k_{4n}; \quad K_{8n}; \quad k_{8n}; \quad \ldots.$$

Ezt a sorozatot Arkhimédészi sorozatnak nevezzük. Képzési szabálya a következőképpen alakul: a harmadik tagjától kezdve minden páratlan sorszámú tag közvetlen előtte álló két tag harmonikus közepe, és minden páros számú tag a közvetlen előző kettő mértani középarányosa. Arkhimédész az r sugarú körbe írható szabályos hatszögből indult ki. Ekkor

$$K_6 = 4r\sqrt{3}; \quad k_6 = 6r.$$

Vegyük most az $r = 1$ esetet, ekkor

$$K_6 = 4\sqrt{3}; \quad k_6 = 6.$$

A hatszögekhez tartozó kör kerületére érvényes, hogy

$$4\sqrt{3} > 2\pi > 6,$$

másképp

$$2\sqrt{3} > \pi > 3.$$

Arkhimédész a K_6-tal és a k_6-tal kezdődő tagokból kiszámította a sorozat tagjait egészen a K_{96} és k_{96} kerületekig. A π értékét ezáltal két korlát közé szorította:

$$\frac{K_{96}}{2} > \pi > \frac{k_{96}}{2}.$$

Számítás közben a kerületekben szereplő $\sqrt{3}$ értékét az

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

egyenlőtlenséggel becsülte, de nem tudjuk ez honnan származik, bizonyára olyan művéből, amely még számunkra nem ismert. Végül a következő becsléshez jutott:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ez tizedestört alakban $3,140845 < \pi < 3,1428571$.

2.3. Közel-Kelet, Iszlám országok

Kínában a $\pi = 3$ értéket sokszor használták még akkor is, amikor már a pontos közelítését is ismerték, például a földmérők $\pi = 3$ értékkel számoltak. Az i.e. 2. században készült összefoglaló munkában („Matematika kilenc könyvben") szerepel az a becslés, hogy a kör területe köré írt négyzetének $\frac{3}{4}$-e, ebből származik a $\pi \approx 3$ érték. A gömb térfogatát a $V = \frac{9}{16}d^3$ képlettel számolták, ami a $\pi \approx \frac{27}{8} \approx 3,375$ közelítésnek felel meg.

Liu Ci (i.e.50- i.sz.23) csillagász 3,15-del számolt. Csang Heng csillagász a π helyett $\sqrt{10}$-et vagy $\frac{92}{29} \approx 3,1724$ vett. Vang Fan a π-t $\frac{142}{45} \approx 3,1556$-nek számította. A Han dinasztia elrendelte a mértékegységek egységesítését az egész birodalomban, amelyet Liu Ci hajtott végre. Ekkor a π értéket is rendeletileg $3,1546645 \approx 3,1547$-nek állapították meg. Ez a számot az alábbiak szerint számították ki: a régi mérőedények vizsgálata alapján meghatározták egy 1,62 területegység (csi^2) területű kört. Ebbe berajzoltak egy egységnyi területű négyzetet. A kör átmérője és a négyzet átlója közti különbség fele, amit „résnek" neveztek, $0,0095$ csinek mutatkozott. Ezekből az adatokból a kör átmérője:

$$d = \sqrt{2} + 2 \cdot 0,0095 \approx 1,4332.$$

Mivel a kör területének mérőszáma 1,62, azért a

$$\pi \cdot \frac{d^2}{4} = 1,62,$$

illetve a

$$\pi \cdot \frac{1,4332^2}{4} = 1,62$$

egyenletből $\pi \approx 3,1547$.

Közben akadtak olyan matematikusok, akik pontosabb közelítéseket kerestek a π-re, ide tartozik a 3. századi matematikus Lin Huj, aki egy 10 egységnyi sugarú körbe szabályos 192 oldalú sokszöget rajzolt, a kör területének alsó közelítő értékére a $313\frac{584}{625}$-öt találta. Felső közelítésnek azt a területet vette, amelyet úgy nyert, hogy a beírt sokszög területéhez hozzáadta a kimaradt körszeletek köré írt téglalapok területösszegét. Ekkor a felső összegre

$314\frac{64}{625}$-öt kapott. A két érték számtani közepe közelítőleg $314,0184$, ennek alapján a $\pi \approx 3,14$ közelítést vette.

Pontosabb számítást hajtott végre Cu Cseng-Cse, aki Liu Huj módszerét a körbe írt 12288 és 24576 oldalú szabályos sokszögekre alkalmazta. Ekkor a következőt kapta: $3,1415926 < \pi < 3,1415927$, és számításra a $\pi \approx \frac{355}{113}$ közelítő törtet használta, amely már 7 tizedes jegyig pontos volt. A π-re sokféle közelítést adtak, ezáltal arra tudunk következtetni, hogy az ókori és a középkori Kína matematikusai egymástól elszigetelten éltek, egymás eredményeiről vagy nem értesültek, vagy csak későn szereztek róla tudomást.

Indiában az 5-6. században Árjabhatta alkalmazta a kör területe (T), kerülete (k) és átmérője (d) közötti alábbi összefüggést: $T = \frac{k}{2}\frac{d}{2}$. A piramis térfogatát a háromszögtől vett helytelen analógiával úgy határozta meg, hogy az alapterületet szorozza meg a magasság felével. A gömb térfogatát úgy számította ki, hogy a gömbi félkör területét megszorozza a négyzetgyökével, ami rossz. Árjabhattánál sorakoznak a helyes és helytelen állítások. A feladatoknál azonban a 3,1416 értékkel számolt, ami a hinduk által kapott 9 tizedes jegyre pontos, azaz $\pi \approx \frac{104348}{33215} = 3,1415926539$.

Az iszlám országokban is történtek kutatások a π-vel kapcsolatban. A perzsák 16 tizedes jegyig számították ki. Az arab matematikusok Arkhimédész módszerét alkalmazták egy 180 oldalú, majd 720 oldalú szabályos sokszögre, azonban később kiderült, hogy számolási hibát követtek el. Al-Kási Dzsamsid Gijászaddín a numerikus számolás terén volt jártas a 15. században. 1427-ben jelent meg „Az aritmetika kulcsa” című könyve, amelyben a tizedes törteket ismertette, amelynek az ötlete Kínából származott. Igazán arra volt büszke, hogy 16 tizedesjegy pontossággal adta meg a 2π tizedestörtjét. Kiszámította egy $3 \cdot 2^{28}$ oldalú szabályos sokszög kerületét az „Értekezés a körről” című tanulmányában, és ezt elosztotta a sokszög köré írható kör sugarával. Így kapta Al-Kási a következő eredményt:

$$2\pi \approx 6,2831853071795685,$$

azaz

$$\pi \approx 3,14159265358979325.$$

Indiában 700 évnek kellett eltelnie, amíg egy említésre méltó nagy matematikus született, Srínivásza Ramanudzsan (1887-1920), aki tanárait és társait csodálatba ejtette memóriájával. Ramanudzsan kapcsolatba került Godfrey Harold Hardy angol matematikussal, aki foglalkozott tehetségével és a π-vel kapcsolatban számos összefüggést ismert.

Például egy jelentős és meglepő felfedezése volt Ramanudzsannak:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} + \ldots$$

végtelen sor és

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \ldots}}}}$$

végtelen lánctört. Külön-külön semelyik sem függ össze az e számmal illetve a π-vel, azonban az összegük $\sqrt{\frac{\pi \cdot e}{2}}$, ezt igazolta Ramanudzsan.

További sorok Ramanudzsantól:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1123 + 21460n)(2n-1)!!\,(4n-1)!!}{882^{2n+1} 32^n (n!)^3},$$

$$\frac{99^2}{\sqrt{8}\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26390n)}{(n!)^4\, 396^{4n}}.$$

2.4. Európa

A középkori Európában Kirik diakónus 1134-es jegyzeteiben szerepelnek az égitestek térfogatának számításai Eratoszthenész mérései alapján, ebben a $\pi \approx 3,125$ közelítését használták. Továbbá meg kell említeni Leonardo Fibonacci (1170-1240) nevét, aki a középkor egyik legnevesebb matematikusa volt. Nevéről legtöbbeknek a Fibonacci-sorozat jut eszébe, de fontos szerepet játszott a π értékének meghatározásában is. Fibonacci professzoroktól tanult matematikát, beutazta Egyiptomot, Szíriát, Görögországot, hogy tanulmányozza a különböző vidékek számítási módszereit. A „Patriarca gometriae" című művét 1228-ban írta, melyben helyreállítja a π valódi identitását, megemlítve, hogy a π értéke nem egészen pontosan $3\frac{1}{7}$, hanem csak megközelítőleg annyi. Rámutat arra is, hogy a π értéke a $\frac{377}{120}$ aránnyal is közelíthető. Ez az érték az indiai Ariakhatától származik, ezt Fibonacci megemlíti könyvében, említése arra vall, hogy ismerte az indiai matematikusok műveit is. Az előbb említett közelítésekkel Leonardo nem volt megelégedve, megnevezett egy harmadik közelítő értéket: $\pi = \frac{864}{275} \approx 3,1418$, amelyet maga számított ki. A művének tartalmából kiderül, hogy ismerte Arkhimédésznek az eljárását, amellyel a körbe és a kör köré írt 96 oldalú szabályos sokszöget szerkesztett. Számításai szerint a π értéke az alábbi arányok közé esik:

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1448}{458\frac{1}{5}},$$

amelyeknek megközelítő értéke 3,1418. Fibonacci tehát megállapította a π első három pontos tizedes jegyét.

A 15. században Nicolaus Cusanus több művében foglalkozott a kör kerületének kiegyenesítésével, de csak egy eredménye volt jobb Arkhimédészénél. Módszere eltért, Arkhimédész fix kerületű körbe és köré írt $3, 6, 12, \ldots, 3 \cdot 2^n$ oldalú sokszögekkel, Cusanus $4, 8, 16, \ldots$ oldalú fix kerületű sokszögekbe és köréjük írt körökkel számolt. Az r sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó körív i hosszára a következő képletet adta:

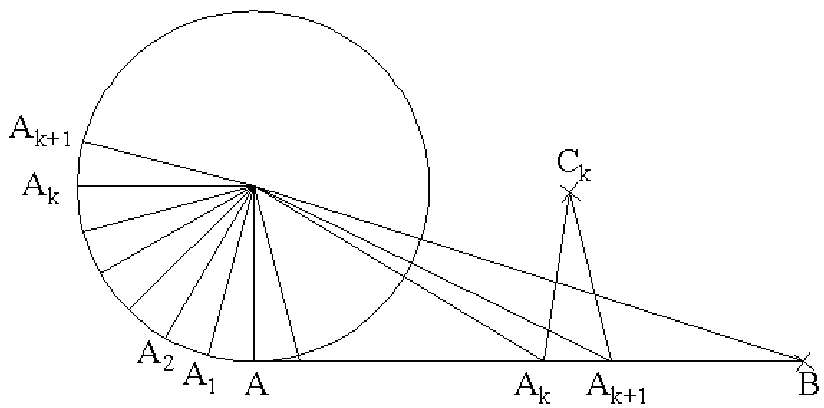
$$\frac{i}{r} = \frac{3 \cdot \sin\alpha}{2 + \cos\alpha}.$$

A 16. században Francois Viète (1540-1603) francia matematikus munkájában, a „Canon mathematicus seu ad triangula”-ban ismertette Arkhimédész eljárását, alkalmazva egy 393216 oldalú sokszögre, így meghatározva a π első kilenc pontos tizedes jegyét. Értékére a következő határokat állapította meg:

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926537.$$

Ezután Adriaen van Roomen (1561-1615) 15 pontos tizedes jegyét állapította meg a π-nek „A sokszögek módszere” című könyvében, ehhez egy $2^{30} = 1073741824$ oldalú sokszöget használt.

Johannes Kepler (1517-1630) világhírű német csillagász, aki a bolygómozgás törvényivel vált ismertté matematikai problémákkal is foglalkozott. 1615-ben megjelent a „Stereometria doliorum viorum” című munkája (A boroshordók térmértana), ahol 92 különböző alakú forgástest térfogatát számította ki. Célja, hogy rájöjjön azokra az alapötletekre, amelyeket Arkhimédész még a bizonyítás előtt megsejtett. A kör területére vonatkozó tétele szerint: „A kör területének és az átmérő négyzetének aránya majdnem 11:14”. A $\pi : 4$ megközelítésére a $11 : 14$ törtet használta, de ismert volt ennél jobb közelítés is. Kepler véleménye szerint Arkhimédész a következőképpen okoskodott.



2.2. ábra.

A 2.2. ábrán a körlap felbontható végtelen sok egybevágó (vagy nem egybevágó) körcikkre. Igen vékony körcikkek keletkeznek, amelyek egyenlő szárú háromszögek. Helyezzük körív alapjukkal a kiterített AB körkerületre úgy, amint ezt az $A_kA_{k+1}C_k$ háromszög mutatja. Toljuk el minden háromszög C_k csúcspontját az AB-vel párhuzamosan a kör O középpontjába. Az így nyert $A_kA_{k+1}O$ háromszög területe ugyanakkora marad, mint az $A_kA_{k+1}C_k$ háromszög területe. Minden körcikkháromszöget így átalakítva, összességük lefedi az ABO derékszögű háromszöget. A kör területe tehát akkora, mint az ABO háromszögé, azaz $r^2 \cdot \pi$. Így $r^2 \cdot \pi : 4 \cdot r^2 = \pi : 4$, ami közelítőleg $11 : 14 \approx 0,7857142$, amikor is $\pi \approx 3,1428568$.

Ludolph Van Ceulen (1540-1610) nem volt hivatásos matematikus. Arkhimédész módszerét alkalmazta egy 32 milliárd 512 millió oldalú sokszögre, ezzel megállapította a π értékének 20 pontos tizedes jegyet, az eredményt 1596-ban hozta nyilvánosságra, de halála után kéziratában további 15 tizedes számjegyet találtak még. A π-t emiatt hosszú időn át Ludolph- féle számnak is nevezték.

Christian Huygens (1629-1695) fizikus, csillagász és matematikus, „De circuli magnitudine inventa" című könyvében megállapította hatszögre alkalmazva a π pontos 9 tizedesjegyét. A π meghatározására Descartes is kigondolt egy módszert, amit Euler és más híres matematikusok is használtak, ez a módszer az azonos kerületű sokszögek módszere, amely a következő elgondoláson alapul: ugyanakkora kerületű n és $2n$ oldalú szabályos sokszögeket tekintenek, és megállapítják a sokszögekbe és a sokszögek köré írt körök sugarai közötti összefüggést.

Az alábbi lánctört, mely megtalálható Wallis 1655-ben megjelent „Arithmetica infinitorum" című könyvében, egyik barátja William Brouncker nevéhez fűződik:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \dots}}}}}.$$

James Gregory (1638-1675) skót matematikus és csillagász, aki 1667-ben adta ki „Vera circuli et hyperbolae quadratura" című könyvét, 1670-ben megtalálta azt a sort, amely megadja az $\operatorname{arctg} x$-t az x ív által:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots.$$

Gregory azonban nem látta, hogy ezt a sort kapcsolatba lehet hozni a π-vel, ezt később Gottfried Wilhelm Leibniz fedezte fel, melyet 1682-ben az „Acta eruditorum”-ban közölt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Thomas Fautat De Lagny (1660-1743), aki különböző algebrai és geometriai problémákkal fogalkozott, később megállapította, hogy ez a sor nem alkalmazható a π szám közelítő értékének kiszámítására.

Newton (1642-1727) munkái páratlanul nagy hatást gyakoroltak a matematikai és fizikai tudományok fejlődésére. Számos felfedezés köszönhető Newtonnak, többek között a differenciálszámítás és az általános tömegvonzás törvénye. A Newton által felfedezett:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^7 + \ldots ,$$

amelyben ha $x = \frac{1}{2}$, akkor a

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{3}{2^7 \cdot 5} + \frac{5}{2^{10} \cdot 7} + \ldots$$

számsor adódik, amelynek segítségével könnyedén ki lehetett számolni a π első 14 tizedes számjegyét.

Abraham Sharp (1651-1742) könyveléssel foglalkozott, amikor Flamsteed csillagász felfedezte őt. Sharp a 3000 csillag katalógusán dolgozott, és logaritmus, sinus és tangens tálázatokat készített, melyeket 1717-ben közölt. A logaritmus táblázatokat felhasználva számította ki a π tizedes számjegyeit. Sharp, aki Gregory képletét alkalmazta, az $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ érték behelyettesítésével az alábbi sort kapta:

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \ldots\right).$$

A sor tagjainak összegzésével meghatározta a π szám 72 tizedes számjegyét.

John Machin csillagász a π-nek 100 tizedes jegyét számította ki az alábbi formulát alkalmazva

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

az arctg $\frac{1}{5}$ és az arctg $\frac{1}{239}$ sorbafejtésével a következő sort kapta:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \dots\right).$$

W. Oughtred (1647) a π-t $\frac{\pi}{\sigma}$-val jelölte, a π-n a „periferia” szó kezdőbetűjét értette, σ-n pedig a „diaméter” kezdőbetűjét, jelölését a matematikusok elfogadták. De Moivre a hányadost $\frac{c}{r}$-rel jelölte. A mai π-vel való jelölést Euler használta, amelyet William Jones nyomán vezetett be.

Machin után Lagny volt, aki 128 tizedesjegyig jutott el a számjegyek ismertetésében. Euler fedezte fel, hogy Lagny tévedett a 113. számjegynél, mivel 7-es helyett 8-as szerepelt.

Heinrich Lambert német matematikus 1766-ban igazolta a π irracionalitását. 1794-ben Legendre pontosabb bizonyítást ad, mint Lambert a π és a π^2 irracionális voltára. Laplace (1749-1825) a 19. században a valószínűségszámításnak új lendületet adott. 1774-től számos tanulmányt írt ebben a témában és 1821-re összeállt „A valószínűség analitikai elmélete” című műve, majd ezt követte ”A valószínűség filozófiai esszéje”. Laplace ebben ismerte fel, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} dx$ valószínűség görbe alatti területe $\sqrt{\pi}$. Ferdinand Lindemann német matematikus (1852-1939) felfedezte, hogy a π szám transzcendens, azaz nem létezik olyan racionális együtthatós polinom, amelynek a π gyöke lenne.

Eközben tovább folytatódott a π tizedesjegyeinek meghatározása. Vega 140 tizedesjegyet számított ki, de az utolsó 4 nem bizonyult pontosnak. 1841-ben William Rutherford 208 tizedesjegyet közölt, aki a

$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{arctg}\,\frac{5}{70} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{70} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{99}$$

képlettel dolgozott. Z. Dase kimutatta, hogy a 152. tizedesjegytől tévedett. Két hónapnyi számolás után 200 tizedesjegyet határozott meg pontosan az alábbi formula segítségével:

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{8}.$$

1847-ben Thomas Clausen 250 tizedes számjegyet számolt ki, ebből 248 pontos volt. Z. Dase 1853-ban már 440 tizdes számjegyig jutott el.

A csúcseredmény 1853 William Shanks nevéhez fűződik, aki 607 tizedes jegyet közölt, de 1873-ban ezt még növelni tudta 707 tizdesjegyig. 1944-ben az angol Fergusson megmutatta, hogy Shanks az 528. tizedestől tévedett. 1958-ban elektronikus számítógépek segítségével a π-nek 10000 tizedes számjegyét állapították meg. Az első 3000 számhoz 10 percre volt szükség.

2.5. Napjainkban

A π tizedesjegyeinek meghatározása a 20. században is folytatódott szuperszámítógépek segítségével. 1949-ben George Reitwiesner a marylandi Ballisztikai Kutató Laboratóriumban meghatározta a π értékét 2037 tizedes jegynyi pontossággal, amelyben az első általános digitális számítógép az ENIAC volt segítségére. Neumann János az ENIAC egyik fejlesztője volt, ugyanebben a kutató laboratóriumban a π tizedesjegyeinek sorrendi összefüggéseit kereste, de sikertelenül. 1950-ben Daniel Shanks és ifjabb John W. Wrench együtt kiszámították a π első százezer tizedes jegyét egy IBM 7090 számítógép segítségével, de rendszert vagy ismétlődést ők sem találtak. A verseny szüntelenül folytatódott a tizedes jegyek meghatározásában 1981-ig, amikor Yasumasa Kanada, a Tokiói Egyetem számítógép tudósainak vezetője egy japán gyártmányú NEC szuperszámítógéppel meghatározott kétmillió számjegyet. 1984-ben Kanada és csapata 16 millió számjegyig jutott el, megfigyelések nélkül. 1985-ben William Gosper matematikus és ismert számítógépzseni, a kaliforniai Sunnyvale-ben székelő Symbolics Inc. alkalmazottja meghatározta a π-t 17,5 millió tizedesjegynyi pontossággal egy Symbolics számítógépet alkalmazva.

1986-ban David H. Bailey a NASA-nál egy Cray 2 szuperszámítógépet felhasználva és a Jonathan és Peter Borwein testvérpáros által felfedezett algoritmust alkalmazva eljutott 29 millió tizedesjegyig, de semmi szokatlant nem talált. 1987-ben Kanada és csapata 134 millió számjegyig jutott egy NEC SX-2 szuperszámítógéppel, de most sem fedeztek fel szabályosságot. 1988-ban Kanada továbbment, de 200 millió számjegy után sem láttak különösebb dolgot, majd 1989 tavaszán a Chudnovsky testvérek váratlanul bejelentették 480 milliós világrekordjukat, azonban ők sem találtak semmit.

Gregory Chudnovskynak saját szuperszámítógépe volt, melynek létrehozásában bátyja, David segített, számítógépüknek az m-zero nevet adták, melyet a π meghatározására alkalmaztak, számítógépüket folyamatosan újították. Kanada és csapata egy Hitachi szuperszámítógéppel a Chudnovsky testvéreket maguk mögött hagyva új rekordot állítottak fel 536 millió tizedes jeggyel. Chudnovskyék folyamatosan dolgoztak és hamarosan elérték az egymilliárd számjegyet, de Kanada és csapata még ezen is túltettek. A Chudnovsky testvérek újabb világrekordot állítottak fel, 1989 őszén 1130160664 tizedes jeggyel. Az eredményüket 1500 darab mágneslemezen tárolták a lakásban, a lemezeken 300 ezer oldal fért el, persze itt csak egyetlen szám van tárolva. 1991 nyarának végén a Chudnovsky testvérek abbahagyták π felfedező kísérletüket. Kiszámították a π első kétmilliárd-kétszázhatvanmillió-háromszázhuszonegyezer-háromszázharminchat számjegyét. Ez a teljesítmény világrekordnak számított, megduplázva az előző, 1989-es eredményüket. A testvérek ideiglenesen túlszárnyalták versenytársukat, Yasumasa Kanadát, ami igen rendkívüli eredmény, ha figyelembe vesszük, hogy Kanada egy 500 kW-os Hitachi óriásgéppel dolgozhatott, amely egy Cray-nél is gyorsabban működött. Kanada elimeréssel nyilatkozott a Chudnovsky-testvérek eredményéről.

A π eddig kiszámított egymás után következő számjegyei között előfordul néhány érdekes részlet: többször is szerepel a 01234567890 és a 09876543210; egyszer 314159265358; egyszer a 27828182845, ami az e természeti állandó első néhány jegye; egyszer az 111111111111; egyszer a 666666666666; egyszer a 777777777777; egyszer a 888888888888; egyszer a 999999999999 fordul elő.

1996-ban Bailey, Borwein és Plouffe egy olyan számítási algoritmust mutatott be, amelynek segítségével kiszámítható a π tetszőleges számjegye (16-os számrendszerben) az előző számjegyek ismerete nélkül, de 1997-re Plouffe megoldotta ugyanezt tizes számrendszerben is:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

1988 óta március 14-én ünnepeljük a kör kerületének és átmérőjének hányadosát, a legendás π számot. Érdekesség, hogy 1879-ben ezen a napon született Albert Einstein. A szám rajongói nemcsak nemzetközi napot alapítottak a π-nek, hanem többek között verseket és dalokat is írtak. 1988-ban Darren Aronofsky filmet is forgatott a híres számról.

2002. decemberében már meghatározták 1241100000000 számjegyét szuperszámítógép segítségével a Tokiói Egyetemen. 2009 augusztusában, egy japán szuperszámítógépnek az úgynevezett Open T2K-nak köszönhetően a π számjegyeinek rekordja 2576980377524 lett. 2009 decemberében ezt a rekordot sikerült túlszárnyalnia Fabrice Bellardnak otthoni számítógén, melynek köszönhetően 2699999990000 tizedes számjegyét ismertette a π-nek.

Máig megoldatlan kérdés, hogy a π normális szám-e, azaz a számjegyei között azonos gyakorisággal szerepelnek-e a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek.

3. fejezet

A π néhány előállítása

3.1. Leibniz-sor

Gottfried Wilhelm Leibniz (1647-1716) polihisztor volt: jogász, történész, fizikus, matematikus egy személyben. 1672-ben diplomataként Párizsban járt, ott ismerkedett meg Huygensszel, akinek barátja és tanítványa volt. Figyelemre méltó geometriai és algebrai felfedezései voltak, és különös érdeklődéssel viseltetett a technika iránt. Az előző fejezetben már szót ejtettünk a Leibniz által felfedezett sorról, aki a sort 1682-ben közölte, de már jóval előtte felfedezte.

1. Tétel. *A Leibniz-sor:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a $q = -x^2$ hányadosú mértani sorozatot, melynek tagjai:

$$1; \quad -x^2; \quad x^4; \quad -x^6; \quad x^8; \quad \ldots.$$

Az első n tag összege a mértani sorozatok összegképlete alapján:

$$S_n := a_n \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

A végtelen mértani sorozat összege, ha $|q| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{0 - 1}{q - 1} = -\frac{1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}.$$

Behelyettesítve $(-x^2)$-et ($|x| < 1$)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{-x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Az összegre $|x| < 1$ esetén tehát felírható, hogy

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots) dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Az integrálás hatványsorokra tagonként elvégezhető, így

$$\int 1 dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \int x^8 dx - \ldots = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx,$$

azaz

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots + C = \operatorname{arctg} x.$$

Az $x = 0$ helyettesítéssel $C = 0$ adódik.

3.2. Viète-féle végtelen szorzat

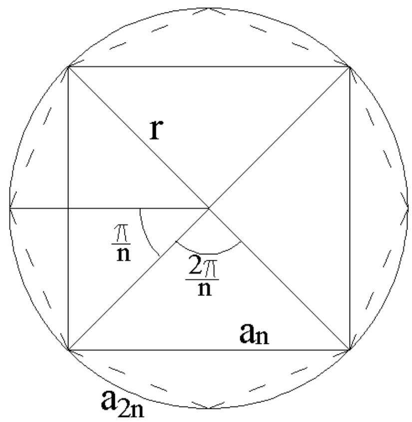
Francois Viète (1540-1603) francia matematikus, aki már ifjú korában érdeklődött a csillagászat iránt, ekkor kezdett foglalkozni elsősorban a csillagászathoz szükséges trigonometriával, de szabadidejében még a matematika egyéb területeivel is foglalkozott. Matematikai munkásságát az „In artem analyticam isagoge” művében foglalta össze, melyet részletekben közölt. Az előző fejezetben megemlítettem már, hogy ő is alkalmazta Arkhimédész eljárását. A Viète-féle szorzat a π közelítésére alkalmas.

2. Tétel. *Viète-féle végtelen szorzat:*

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Bizonyítás. A 3.1. ábrán az r sugarú körbe rajzolt n oldalú szabályos sokszög területe:

$$T_n = \frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin \cdot \frac{2\pi}{n} = n \cdot r^2 \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}.$$



3.1. ábra.

A kétszer akkora oldalszámú, ugyancsak az r sugarú körbe írt szabályos sokszög területe:

$$T_{2n} = \frac{2n \cdot r^2}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n} = n \cdot r^2 \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

következésképpen

$$T_n : T_{2n} = \cos \frac{\pi}{n}.$$

Legyen a kezedeti sokszög négyzet, amelynek területe

$$T_4 = 2r^2.$$

Az oldalszámot folyton kettőzve

$$T_4 : T_8 = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$T_8 : T_{16} = \cos \frac{\pi}{8},$$

$$T_{16} : T_{32} = \cos \frac{\pi}{16},$$

$$\vdots$$

$$T_n : T_{2n} = \cos\frac{\pi}{n},$$

ahol

$$n = 2^{k+1}; \quad k = 1, 2, \ldots.$$

A fenti arányokat összeszorozva:

$$T_4 : T_{2n} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{n}.$$

Ezután vegyük figyelembe, hogy $T_4 = 2r^2$ és hogy n, illetve k növelésével, T_{2n} tetszőlegesen megközelíti $r^2\pi$-t, az r sugarú kör területét, így

$$\frac{2r^2}{r^2\pi} = \frac{2}{\pi} = \frac{T_4}{T_{2n}} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{n},$$

vagyis

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\cos\pi}{4} \cdot \frac{\cos\pi}{8} \cdot \ldots.$$

Mivel

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

ezért

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$\vdots$$

Így kapjuk, hogy

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots.$$

3.3. Euler-sor

Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus és fizikus, a matematikatörténet egyik legjelentősebb alakja. Annak ellenére, hogy élete vége felé mindkét szeme világát teljesen elvesztette, munkakedve töretlen maradt. Káprázatos memóriával és belső látással diktálta műveit.

3. Tétel. *Az Euler-sor:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ez az 1734-es eredmény Leonhard Euler egy klasszikus, híres és fontos tétele.

1. Bizonyítás. A most következő bizonyítás 1956-ban jelent meg William J. LeVeque számelmélet feladatgyűjteményében feladatként. A bizonyítás az

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy$$

kettős integrál kétféle kiszámításán alapul.

Az elsőhöz az $\frac{1}{1-xy}$ kifejezést mértani sorrá fejtjük

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dxdy.$$

Az összeadandókat szorzatokra bontjuk, majd integrálunk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \cdot \left(\int_0^1 y^n dy \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) \cdot \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right).$$

Ekkor a következőt kaptuk

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

A számítás azt is mutatja, hogy a (pozitív függvényen vett, $x = y = 1$ pólusú) kettős integrál véges.

Az I másik kiszámításához új koordinátákat vezetünk be, melyek $u := \frac{y+x}{2}$ és $v := \frac{y-x}{2}$. Az integrálási tartomány egy $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oldalú négyzet, melyet az eredeti tartományból kapunk meg úgy, hogy a koordinátarendszert 45°-kal elforgatjuk, majd $\sqrt{2}$-ed részére kicsinyítjük. Behelyettesítve $x = u - v$-t és $y = u + v$-t

$$1 - xy = \frac{1}{1 - (u - v)(u + v)} = \frac{1}{1 - u^2 + v^2}$$

adódik. Az integrál átalakításához $dxdy$-t $2dudv$-vel kell helyettesíteni, hogy kompenzáljuk a koordináta-transzformáció miatti területfeleződést, ugyanis a transzformáció Jacobi-determinánsa 2. A Jacobi-determináns kiszámítása a következőképpen történik. Az

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v)$$

változókat behelyettesítjük, ekkor

$$\int_T f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv,$$

ahol

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Az új integrálási tartomány és az integrálandó függvény az u tengelyre nézve szimmetrikusak, ezért kétszer kell a tartomány felső felében kiszámítani az integrált, melyet természetes módon vágunk két részre:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1 - u^2 + v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1 - u^2 + v^2} \right) du.$$

Felhasználva, hogy

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

akkor

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \right) du +$$

$$+4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - u}{\sqrt{1 - u^2}} \right) du$$

kapunk. Az integrálokat egyszerűbbé tehetjük és végül kiszámíthatjuk, ha $u = \sin\theta$-t illetve $u = \sin\theta$-t helyettesítünk. Azonban másképp is tovább haladhatunk, ha közvetlenül kiszámítjuk, hogy a

$$g(u) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

függvény deriváltja

$$g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

míg a

$$h(u) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right)$$

deriváltja

$$h'(u) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Használhatjuk tehát az

$$\int_a^b f'(x)\, f(x)\, dx = \left[\frac{1}{2} f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2} f(b)^2 - \frac{1}{2} f(a)^2$$

formulát, és így

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} g'(u)\, g(u)\, du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 -2h'(u)\, h(u)\, du =$$

$$= 2\left[g(u)^2\right]_0^{\frac{1}{2}} - 4\left[h(u)^2\right]_{\frac{1}{2}}^1,$$

ahonnan

$$I = 2g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2g(0)^2 - 4h(1)^2 + 4h\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ebből a bizonyításból integrálással kaptuk meg az Euler-sor értékét, egy viszonylag egyszerű koordináta-transzformációval. Egy ehhez hasonló jellegű zseniális bizonyítást talált később Beukers, Calabi és Kolk, melyben egy egyáltalán nem triviális koordináta-transzformációt használtak. Bizonyításuk kiindulópontja a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor felbontása páros és páratlan tagokra. Páros tagok:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

páratlan tagok:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

azaz

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Így az Euler-sor ekvivalens a páratlan tagokra vonatkozó következő egyenlőséggel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Bizonyítás. Az összeget kifejezhetjük egy kettős integrállal, mint azt az előző bizonyításban is tettük

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - x^2 y^2} dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

A J integrált kell kiszámítani. Beukers, Calabi és Kolk az alábbi új koordináták bevezetését javasolták:

$$u := \arccos \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - x^2 y^2}} \quad v := \arccos \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2 y^2}}.$$

A kettős integrál kiszámításakor nem vesszük figyelembe az integrálási tartomány határát. Az x-et és y-t a $0 < x < 1$ illetve $0 < y < 1$ tartományban vizsgáljuk, ekkor u és v az $u > 0$, $v > 0$, $u + v < \frac{\pi}{2}$ háromszögben fekszik. A koordináta-transzformáció explicit inverze a következő helyettesítéshez vezet:

$$x = \frac{\sin u}{\cos v} \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}.$$

Ez a képlet bijektív transzformációt ad meg az $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ egységnégyzet belseje és a $T = \left\{(u, v) : u, v \geq 0, u + v \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ háromszög belseje között. Ezután a koordináta-transzformáció Jacobi determinánsát kell kiszámítani:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\cos u}{\cos v} & \dfrac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \dfrac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} & \dfrac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2 y^2.$$

Ez azt jelenti, hogy a kiszámítandó integrál

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - u} 1 du dv$$

alakba írható, amely a T háromszög $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{8}$ területével egyenlő.

3.4. Wallis-formula

John Wallis (1616-1703) angol matematikus, aki nagy csodálója volt a görög matematikusoknak, kiadta Arkhimédész, Ptolemaiosz és Arisztarkhosz munkáinak egy részét. 1673-ban közétette a „De algebra tractatus, historicus et practicus"-t.

Wallis-formula:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

4. Tétel.

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Bizonyítás. Vezessük be az: $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor $I_0 = \pi$ és $I_1 = \cos 0 - \cos \pi = 2$. Ha $n \geq 1$, akkor

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin^{n-1} x dx = \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \sin^{n-1} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\sin^{n-1} x - \cos^2 x \cdot \sin^{n-1} x\right] dx =$$

$$= I_{n-1} - \int_0^\pi \cos x \cdot \left[\sin^{n-1} x \cdot \cos x\right] dx.$$

A parciális inetegrálás képletét alkalmazva

$$\int_0^\pi \cos x \cdot \left[\sin^{n-1} x \cdot \cos x\right] dx = \int_0^\pi \cos x \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sin^n x\right)' dx =$$

$$= \left[\cos x \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin^n x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \cdot \sin^n x \cdot (-\sin x)\, dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{n} \cdot I_{n+1}.$$

Azt kapjuk, hogy

$$I_{n+1} = I_{n-1} - \frac{1}{n} \cdot I_{n+1},$$

amiből

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}.$$

Így

$$\int_0^\pi \sin^{2n-1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot 2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \pi \qquad \left(n \in \mathbb{N}^+\right),$$

és

$$\int_0^\pi \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \cdot 2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel

$$\sin^{2n-1} x \geq \sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x$$

minden $x \in [0, \pi]$-re, ezért

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)} \cdot 2 \geq \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \pi \geq \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \cdot 2,$$

amiből

$$\left[\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} \geq \pi \geq \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{2}{2n+1}$$

következik. Jelöljük W_n-nel a $\left[\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor $W_n \geq \pi \geq W \cdot \frac{2}{2n+1}$, vagyis $\pi \leq W_n \leq \pi \cdot \frac{2n+1}{2n}$, így a rendőrszabály szerint $\lim_{n \to \infty} W_n = \pi$.

4. fejezet

A π irracionalitása

A π irracionalitását már Arisztotelész is sejtette, amikor a kör sugaráról és kerületéről azt állította, hogy nem összemérhetők. Az első bizonyítást erre az alapvető tulajdonságra Johann Heinrich Lambert adta 1766-ban. A mi bizonyításunk 1947-ből, Ivan Niventől származik: rendkívül elegáns bizonyítás, mely elemi analízist használ. A módszer hatékony és valamivel több is kijön belőle, mint azt mind Iwamoto, mind Koksma megmutatta: π^2 irracionális (ez erősebb állítás) és e^r irracionális minden $r \neq 0$ racionális számra.

5. Tétel. *π^2 irracionális.*

A tétel bizonyításához az alábbi lemmára van szükség:

1. Lemma. *Valamely rögzített $n \geq 1$-re legyen*

$$f(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}.$$

Ekkor

- *Az $f(x)$ függvény $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ alakú polinom, ahol a c_i együtthatók egészek.*

- *$0 < x < 1$ esetén $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ teljesül.*

- *Az $f^k(0)$ és az $f^k(1)$ minden $k \geq 0$-ra egészek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, ahol $a, b > 0$ egészek. Most az

$$F(x) := b^n \left(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^2(x) + \pi^{2n-4} f^4(x) \mp \ldots\right)$$

polinomot fogjuk használni, mely láthatóan kielégíti az

$$F''(x) = -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x)$$

azonosságot. A lemma harmadik állítása miatt $F(0)$ és $F(1)$ egészek. Elemi deriválási szabályok alapján

$$\frac{d}{dx}\left[F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x\right] = \left(F''(x) + \pi^2 F(x)\right) \sin \pi x =$$

$$= b^n \pi^{2n+2} f(x) \sin \pi x = \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x.$$

Így ezt kaptuk:

$$N := \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x dx = \left[\frac{1}{\pi} F'(x) \sin \pi x - F(x) \cos \pi x\right]_0^1 =$$

$$= F(0) + F(1),$$

ami egész. Továbbá N pozitív, hiszen egy (a határokat leszámítva) pozitív függvény integráljaként definiáltuk. Ha azonban n-et olyan nagynak választjuk, hogy $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$ legyen, a lemma második állításából

$$0 < N < \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

adódik, ami ellentmondás.

5. fejezet

Összefoglalás

A szakdolgozatban betekintést nyertünk a π történetébe, illetve megismerhettük annak néhány előállítását bizonyítással együtt. Találkozhattunk olyan híres tudósokkal, akik a π felfedezésében jelentős eredményt értek el, mégis a tudomány más területén váltak ismertté, többek között fizikusként, csillagászként emlékezünk rájuk.

Irodalomjegyzék

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Bizonyítások a könyvből,* Typotex, Budapest (2004)

[2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Analízis II.,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2007)

[3] Florica T. Cimpan: *A π története,* Albatrosz Könyvkiadó (1971)

[4] Sain Márton: *Nincs királyi út!,* Gondolat, Budapest (1986)

[5] Dörrie, H.: *A diadalmas matematika,* Gondolat, Budapest (1965)

Internetes oldalak

[6] http://hu.wikipedia.org/wiki/Pi_(szam) [2010.04.20]

[7] http://wadanet.com/hasegawa/chud.htm [2010.04.20]

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_algorithm [2010.04.20]

[9] http://t-t.freeweb.hu/minden/tudom/pii03.htm [2010.04.20]

[10] http://napipille.blog.hu/2010/03/14/nemzetkozi_pi_nap [2010.04.20]