

A Peano-görbe

Besenyei Ádám
ELTE

A „folytonos görbe” kifejezés hallatán hajlamosak vagyunk először egy, a szó szoros értelmében egybefüggően megrajzolható „vonatra” gondolni. A görbe fogalma azonban a vártnál bonyolultabb, és a róla alkotott naiv elképzeléshez képest számos meglepetést tartogat a számunkra. Giuseppe Peano (1858-1932) olasz matematikus 1890-ben egyik dolgozatában olyan görbére mutatott példát, amely – szemléletünknek igencsak ellentmondva – a síkon egy négyzet minden pontján áthalad. Azóta több konstrukció is született ilyen görbékre, melyeket szokás Peano-görbének is hívni. A következőkben kétféle módon bizonyítjuk Peano-görbe létezését, és megvizsgáljuk bizonyos tulajdonságait. A görbe megrajzolására – éppen jellemző tulajdonsága folytán – semmiképpen sem vállalkozhatunk.

Először ismerkedjünk meg a görbékkel kapcsolatos alapvető fogalmakkal.

Egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos függvényről azt mondjuk, hogy egy *görbét* reprezentál a síkon, magát f -et pedig a görbe egy paraméterezésének hívjuk. Például az $y = x$ egyenletű egyenes $[0, 4]$ intervallum „fölötti” szakaszának kétféle paraméterezése a következő:

$$[0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (t; t) \quad \text{vagy} \quad [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (t^2; t^2)$$

és ezen kívül még sok más. Természetesen hasonlóan értelmezhetünk görbéket a 3 dimenziós térben (sőt sokkal általánosabb terekben) is, \mathbb{R}^2 helyett \mathbb{R}^3 módosítással.

1. Feladat. *Adjuk meg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör egy paraméterezését!*

1. A Peano-görbe egy konstrukciója

A most következő konstrukcióhoz szükségünk van egy (önmagában is érdekes) új fogalom, a *Cantor-halmaz* bevezetésére. Képezzük a C_n halmazokat a következő módon: C_0 legyen a $[0, 1]$ intervallum. C_0 -ból elhagyva a nyílt $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ intervallumot, C_1 -et kapjuk. Hagyjuk el C_1 -ből az $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ és $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$ intervallumokat, így kapjuk C_2 -t. Általában, ha adott C_{n-1} , akkor C_n álljon azon 2^n db $\frac{1}{3^n}$ hosszú zárt intervallumból, amelyek C_{n-1} intervallumaiból a „középső”

nyílt harmadok elhagyásával keletkeznek. Jelölje C a „végül megmaradó” részt, vagyis a C_i halmazok közös részét. Szokás C -t Cantor-féle triadikus halmaznak is nevezni.

2. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a Cantor-halmaz kontinuum számosságú! (Segítség: figyeljük meg a 3. állításban definiált függvényt, és használjuk fel a következő állítást is.)*

1. Állítás. *Pontosan azok az x számok vannak a Cantor-halmazban, amelyeknek van olyan $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ hármas számrendszerbeli előállítása, ahol a_i 0 vagy 2 (azaz sohasem 1) minden i -re.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy C_n -ben pontosan azok a számok vannak, amelyeknek van olyan triadikus – azaz hármas számrendszerbeli – előállítása, melyben az első n helyen csak a 0, 2 jegyek állnak. Innen azonnal adódik az állítás.

Világos, hogy a C -beli számok 0, 2 jegyekkel való előállítása egyértelmű. Ugyanis, ha egy ilyen számnak lenne kétféle előállítása, akkor a legelső különböző jegy az egyikben 0, a másikban pedig 2. Ekkor viszont a két előállítás különbségére (ami persze 0)

$$\begin{aligned} & 0, a_1 a_2 a_3 \dots 2 \dots - 0, a_1 a_2 a_3 \dots 0 \dots \geq \\ & \geq 0, a_1 a_2 a_3 \dots 2 - 0, a_1 a_2 a_3 \dots 1 = 0, 000 \dots 1 \end{aligned}$$

teljesül, ami lehetetlen. Ennek alapján a továbbiakban a Cantor-halmaz elemeire úgy tekintünk, mint a 0 és 1 közötti, a hármas számrendszerben a 0 és a 2 jegyekkel felírt számokra. Értelmezzük ezek után a következő függvényt:

$$f: C \rightarrow C^2 \quad 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \dots \mapsto (0, a_1 a_3 a_5 \dots ; 0, a_2 a_4 a_6 \dots),$$

ahol a_i 0 vagy 2 minden i -re.

2. Állítás. *Az előbb definiált f függvény folytonos a Cantor-halmazon.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz egy segédállításra, először azt igazoljuk.

1. Lemma. *Ha az x_1 és x_2 Cantor-halmazbeli számokra $|x_1 - x_2| < \frac{1}{3^n}$ teljesül, akkor x_1 és x_2 „harmadosvessző” utáni első n jegye megegyezik.*

Az 1. Lemma bizonyítása. Tegyük fel (indirekt), hogy csak az első k ($k < n$) jegyük azonos. Ekkor viszont

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k 2 \dots - 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k 0 \dots| \geq \\ &\geq |0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k 2 - 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k 1| = \frac{1}{3^{k+1}} \geq \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Ez pedig ellentmondás.

A 2. Állítás bizonyítása. Rögzítsük az $x_0 \in C$ pontot és az ε pozitív számot. Ekkor van olyan n egész szám, melyre $\varepsilon > \frac{1}{3^{n-1}}$. Az 1. lemma miatt, ha $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{3^{2n}}$, akkor x és x_0 első $2n$ harmadosjegye megegyezik. Ekkor viszont $f(x)$ és $f(x_0)$ megfelelő koordinátaiban az első n harmadosjegy ugyanaz (mivel $f(x)$ koordinátáit x jegyeinek a „szétválasztásával” kaptuk). Ez pedig azt jelenti, hogy $f(x)$ és $f(x_0)$ megfelelő koordinátáinak különbsége legfeljebb $\frac{1}{3^n}$. Tehát

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{2 \frac{1}{3^{2n}}} < \frac{1}{3^{n-1}} < \varepsilon.$$

Vegyük észre azt is, hogy f szűrjektív, vagyis értékkészlete a teljes C^2 .

Eddig tehát már van egy, a Cantor-halmazból képező folytonos függvényünk, amely teljesen lefedi C^2 -et. Már csak annyi van hátra, hogy az értelmezési tartományát kiterjesszük a teljes $[0, 1]$ intervallumra, valamint az értékkészletét a $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazra (mindezt persze folytonosan). Ez utóbbihoz vegyünk észre, hogy egy Cantor-halmazbeli számhoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy kettes számrendszerben felírt $[0, 1]$ -beli számot. Tekintsük ugyanis az alábbi megfeleltetést:

$$g: C^2 \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \quad (0, a_1 a_3 \dots ; 0, a_2 a_4 \dots) \mapsto (0, b_1 b_3 \dots ; 0, b_2 b_4 \dots),$$

$$\text{ahol } b_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } a_i = 0 \\ 1, & \text{ha } a_i = 2, \end{cases}$$

valamint $0, b_1 b_3 \dots$ és $0, b_2 b_4 \dots$ kettes számrendszerbeli számokat jelentenek.

3. Állítás. *A fent definiált g függvény folytonos.*

Bizonyítás. Adott $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}) \in C^2$ és $\varepsilon > 0$. Legyen n egész szám, melyre $\varepsilon > \frac{1}{2^{n-1}}$ és $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in C^2$. Mivel

$$|x - x_0| = \sqrt{(x^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + (x^{(2)} - x_0^{(2)})^2} \geq \sqrt{(x^{(i)} - x_0^{(i)})^2} = |x^{(i)} - x_0^{(i)}|,$$

azért $|x - x_0| < \frac{1}{3^n}$ esetén

$$|x^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{1}{3^n} \quad (i = 1, 2).$$

Vagyis, ha $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{3^n}$, akkor x és x_0 megfelelő koordinátaiban az első n harmadosjegy megegyezik. Ez viszont azt jelenti, hogy $g(x)$ és $g(x_0)$ megfelelő koordinátaiban az első n jegy (a legelső 0-t nem számolva) ugyanaz. Persze itt már előfordulhat, hogy $g(x)$ -nek többféle kettes számrendszerbeli előállításja van.

Így csak azt mondhatjuk, hogy létezik $g(x)$ -nek és $g(x_0)$ -nak olyan előállítása, melyben a megfelelő koordinátákban az első n jegy megegyezik. De akkor

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \sqrt{2 \frac{1}{2^{2n}}} < \frac{1}{2^{n-1}} = \varepsilon.$$

Annyit még érdemes megjegyeznünk g -vel kapcsolatban, hogy nyilván szürjektív (a $[0, 1] \times [0, 1]$ -re nézve), de nem injektív, vagyis különböző helyeken vehet föl azonos értékeket.

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy g nem injektív!*

Vizsgáljuk most meg a $g(f(x))$ függvényt! Elmondhatjuk róla, hogy a Cantor-halmazt folytonosan képezi le a teljes $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazra, ami éppen egy egy-ségnégyszeg a síkon. A Peano-görbe megalkotásának utolsó lépéseként terjesszük ki a $g(f(x))$ függvényt a teljes $[0, 1]$ intervallumra! Ehhez meg kell mondanunk, hogy milyen értékeket vegyen fel a $[0, 1] \setminus C$ halmazon. Tudjuk, hogy ez éppen azokból a nyílt intervallumokból áll, amelyeket C elkészítésénél „kidobtunk” $[0, 1]$ -ből. Egy ilyen intervallum legyen például (a, b) . Ekkor $g(f(x))$ legyen lineáris ezen az intervallumon, azaz $g(f([a, b]))$ legyen a $g(f(a)), g(f(b))$ pontokat összekötő szakasz. Könnyen látható, hogy a kapott függvény folytonos marad. Vagyis a kiterjesztett függvény éppen egy Peano-görbe paraméterezése.

1. Következmény. (Peano) *Létezik $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ folytonos és szürjektív leképezés.*

4. Feladat. *Lehet-e egy Peano-görbe korlátos változású¹?*

A bizonyítás végén érdemes egy kicsit eltűnődni azon, hogy miért is kellett bevezetnünk a Cantor-halmazt. Vajon nem lett volna elég, ha egyszerűen a teljes $[0, 1]$ -en tekintjük a 2. állításban szereplő f „koordináta-szétválasztó” függvényt? A válasz egyszerű: a valós számokon f nem folytonos! Ezt könnyen be is láthatjuk, tekintsük ugyanis például a (tízes számrendszerben felírt) $0,1$ számot. Ekkor az $x_n = 0,099\dots 9$ sorozatra (ahol a kilences jegyek száma n) $x_n \rightarrow \frac{1}{10}$, de $f(x_n) = (0,099\dots 9; 0,99\dots 9) \not\rightarrow f\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}; 0\right)$. Innen az is látszik, hogy f folytonosságának kulcsa az 1. lemma volt. A valós számokon a lemma megfelelője nem igaz. Attól, hogy két valós szám közel van egymáshoz, még nem feltétlenül azonos az első néhány jegyük.

5. Feladat. *Van-e olyan görbe, amely teljesen kitölt egy kockát?*

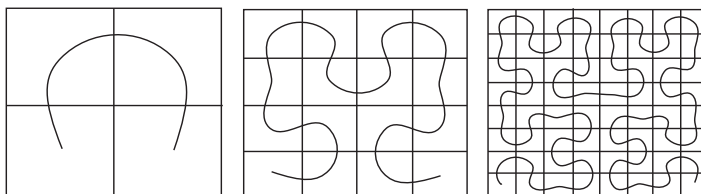
¹Egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezésről azt mondjuk, hogy korlátos változású (vagyis az általa reprezentált görbének van véges ívhossza), ha van olyan V szám, melyre minden $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ felosztás esetén $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V$. A legkisebb ilyen V -t nevezzük f megváltozásának.

2. A görbe egy másik lehetséges konstrukciója

Ebben a részben David Hilbert német matematikus ötlete alapján állítjuk elő a görbét. Ennek segítségével valamivel szemléletesebb tulajdonságokat is megtudunk a görbéről.

Először is vegyük az $I = [0, 1]$ zárt intervallumot a számegyenesen, és a $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ zárt négyzetlapot a síkon. Osszuk fel az intervallumot négy egyenlő részre, a kapott négy zárt intervallum sorrendjük szerint (balról jobbra) számozva $I_1^1, I_2^1, I_3^1, I_4^1$. Az előbbi négy intervallum mindegyikének négy egyenlő részre osztásával kapjuk az I_1^2, \dots, I_{16}^2 intervallumokat, amelyek ugyancsak balról jobbra számozottak (vagyis az első négy I_1^1 -ben, a következő négy I_2^1 -ben, stb. van). A fenti eljárást ismételjük újra és újra az egyre kisebb intervallumokkal, így kapjuk az I_j^i intervallumokat. Világos, hogy rögzített i esetén az I_j^i zárt intervallumokból 4^i darab van, mindegyikük hossza 4^{-i} .

Hasonló eljárást alkalmazunk a négyzetre is. Vágjuk szét Q -t négy egybevágó $\frac{1}{2}$ oldalú zárt kis négyzetre. Legyenek ezek Q_1^1, \dots, Q_4^1 , a számozást úgy végezve, hogy Q_i^1 és Q_{i+1}^1 ($i < 4$) szomszédosak legyenek. A fenti kis négyzetek mindegyikének négy egybevágó négyzetre való osztásával keletkeznek a Q_1^2, \dots, Q_{16}^2 négyzetek. A számozást úgy végezzük, hogy a Q_1^2, \dots, Q_4^2 négyzetek Q_1^1 -ben, a Q_5^2, \dots, Q_8^2 négyzetek Q_2^1 -ben stb. feküdjenek, és egymást követő (alsó) indexűek szomszédosak legyenek. Általában, ha már adott i esetén megvannak a Q_j^i négyzetek ($1 \leq j \leq 4^i$), akkor negyedeléssel kapjuk a 2^{-i-1} oldalhosszú zárt Q_j^{i+1} ($1 \leq j \leq 4^{i+1}$) négyzeteket. Mégpedig úgy, hogy az első négy Q_1^i -ben, a következő négy Q_2^i -ben, és így tovább, az utolsó négy $Q_{4^i}^i$ -ben legyen, és szomszédos indexűek szomszédosak legyenek. Gondoljuk meg, hogy a számozás mindig elvégezhető. Egy lehetséges számozássorozat első három lépését mutatja az 1. ábra, a berajzolt vonal mentén haladva a négyzetek sorrendjét.



1. ábra.

A fenti eljárással kapcsolatban egy fontos észrevételt tehetünk.

4. Állítás. Ha az I_j^i, I_l^k intervallumokra $I_j^i \subset I_l^k$ teljesül, akkor $Q_j^i \subset Q_l^k$. Igaz a megfordítás is: $Q_j^i \subset Q_l^k$ esetén $I_j^i \subset I_l^k$.

A négyzetek és az intervallumok konstrukciója alapján az állítás világos, belátását az olvasóra bízunk.

Mielőtt definiálnánk a görbét, szükségünk van még néhány állításra. Legyen $t \in I$ vagy az I egyik végpontja vagy pedig olyan szám, amely egyetlen intervallumnak sem végpontja (melyek az ilyen tulajdonságú számok?). Ekkor minden i -hez egyértelműen létezik j_i úgy, hogy $t \in I_{j_i}^i$. Mivel az $I_{j_i}^i$ intervallumok egymásba vannak skatulyázva, így a 4. állítás értelmében a $Q_{j_i}^i$ négyzetek is egymásba skatulyáztak.

5. Állítás. $A \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_{j_i}^i$ halmaz egyelemű.

Bizonyítás. Tekintsük a négyzetek vetületeit Q egyik vízszintes oldalára. Ezek egymásba skatulyázott zárt intervallumok, így a Cantor-axióma² szerint van közös pontjuk. Mivel a négyzetek oldalhossza tetszőlegesen kicsi lehet ($Q_{j_i}^i$ oldalhossza 2^{-i}), így a vetület szakaszok hossza is bármilyen kicsi lehet. Ezért a szakaszok metszete nem tartalmazhat két pontot, mert a két pont távolságánál rövidebb szakasz csak az egyik pontot tartalmazhatja. Hasonlóan a függőleges vetületeknek is egyértelmű a metszete. Következésképpen a négyzetek metszete is egyelemű, mert különben a fenti metszetek valamelyike vagy üres vagy legalább kételemű lenne. Ezzel az állítást beláttuk.

Most legyen $t \in I$ olyan, amely a k -adik lépésben lett osztópont ($k \geq 1$). Ekkor $i < k$ esetén egyértelműen létezik j_i , melyre $t \in I_{j_i}^i$. Viszont $i \geq k$ esetén pontosan két intervallumban (a határukon) van benne t , ezek indexe szomszédos, j_i és $j_i + 1$. Ekkor a $Q_{j_i}^i$ -k egymásba skatulyázott négyzetek, hasonlóan a $Q_{j_i+1}^i$ -ek is ($i \geq k$). Ráadásul szomszédos indexű négyzetek szomszédosak, így a_i -vel jelölve $Q_{j_i}^i$ és $Q_{j_i+1}^i$ közös oldalát, az a_i -k szükségképpen egymásba skatulyázott zárt szakaszok. Ekkor a Cantor-axióma miatt van közös pontjuk. Mivel a szakaszok hossza tetszőlegesen kicsi lehet, ezért az is látszik, hogy a közös pont egyértelmű.

Ezek után definiáljuk a $\gamma: I \rightarrow Q$ görbét a következő módon: minden $t \in I$ pontra legyen $\gamma(t)$ a t pontot tartalmazó intervallumoknak megfelelő négyzetek közös pontja.

6. Állítás. *A most definiált γ folytonos és szürjektív leképezés a szakaszcson a négyzetre.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\gamma(t)$ egyértelmű, így γ valóban függvény. A folytonosság igazolásához legyen $t_0 \in I$, amely nem osztópont. Adott $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $\sqrt{2} \cdot 2^{-k} < \varepsilon$. Vegyük a t_0 -t tartalmazó (egyértelműen meghatározott) $I_{i_k}^k$ intervallumot. Ekkor γ definíciója miatt $\gamma(I_{i_k}^k) \subseteq Q_{i_k}^k$, tehát

$$|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq \sqrt{2} \cdot 2^{-k} < \varepsilon \quad (t \in I_{i_k}^k),$$

hiszen $Q_{i_k}^k$ oldalhossza 2^{-k} . Hasonlóan látható be a folytonosság az osztópontokban, ezt nem részletezzük.

²A Cantor-axióma a következőt mondja ki: az $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak van közös pontja.

Hátra van még a szürjektivitás. Legyen $q \in Q$. Könnyen látható, hogy ekkor létezik (nem feltétlenül egyértelműen) q -t tartalmazó egymásba skatulyázott $Q_{j_i}^i$ négyzetek sorozata. A 4. állítás szerint az $I_{j_i}^i$ -k egymásba skatulyázott zárt intervallumok (melyek hossza 0-hoz tart), és így $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_{j_i}^i = t_0$ egyértelmű. De ekkor γ definíciója miatt

$$\gamma(t_0) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_{j_i}^i = q.$$

2. Következmény. γ Peano-görbe

6. Feladat. *Mutassuk meg, hogy γ nem injektív!*

A most bemutatott konstrukcióval kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy lehetséges egy másik módon való tárgyalása is. Ennek lényege, hogy γ -t görbék sorozatának határgörbéjeként definiáljuk. Minden felosztáshoz (az 1. ábrához hasonlóan) hozzárendelhetünk egy görbét, amely minden négyzeten sorrendben áthalad. Megmutatható, hogy létezik határgörbéje a görbék sorozatának, és az Peano-görbe.