Teleszkopikus összegekről, avagy kalandozások egy versenyfeladat körül

Besenyei Ádám
badam@cs.elte.hu

1. Bevezetés

Középiskolai matematikaversenyeken gyakran előfordul, hogy egy-egy kitűzött feladat valójában speciális esete vagy éppen egyszerű következménye valamely általános tételnek. Mivel azonban az ilyen tételek rendszerint túlmutatnak a középiskolás tananyagon, és a megoldási útmutatóban általában nincs hely a részletezésükre, ezért a diákok és tanáraik csak ritkán ismerhetik meg az általánosításokat, valamint azok eredetét. Jelen írás célja éppen az, hogy középiskolás szinten bemutassa egy 2012. évi matematika versenyfeladat mögött rejlő elméleti és történeti érdekességeket. Figyelmünk középpontjában a teleszkopikus összegek állnak majd, amelyekhez kapcsolódóan számos hasznos fogalomra, illetve összefüggésre világítunk rá, és közben kiváló matematikusokat ismerünk meg. Kalandozásunk során a lehető legkevesebb előismeretre támaszkodunk, ezért minden előkerülő fogalomra és összefüggésre emlékeztetni fogunk. A cikk olvasásával így bárki megpróbálkozhat, de egyes részek akár órán vagy szakkörön is feldolgozhatók. A téma iránt mélyebben érdeklődők számára menet közben bőséges olvasnivalót ajánlunk, valamint a cikk jó néhány önálló gondolkodásra kitűzött feladatot szintén tartalmaz, amelyekhez útmutatást is adunk.

2. Kiindulás: egy 2012. évi OKTV feladat

Matematikatörténeti utazásunk kiindulópontja a 2011/2012. tanévi matematika Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (OKTV) döntő fordulójának a II. kategóriában indulók, vagyis a nem speciális matematika tanterv szerint haladó gimnazisták számára kitűzött 3. feladata (lásd a [15] honlapot).

2.1. Feladat (OKTV, 2011/2012)**.** Legyen $h(1) = 1$ és $n = 2, 3, \dots$ esetén $h(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Mutassuk meg, hogy

$$L = \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{2 \cdot h^2(2)} + \frac{1}{3 \cdot h^2(3)} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot h^2(2012)} < 2.$$

Akadhat, aki még nem találkozott a $\sum$ jellel (görög nagy szigma betű), amelyet összegek tömör leírására (a $\dots$ helyett) is használunk a következőképpen.

2.2. Jelölés. Ha (a_n) egy tetszőleges valós számsorozat, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \qquad (1)$$

amelyet úgy olvasunk, hogy „szumma $i = 1$-től n-ig a_i". Természetesen i helyett bármilyen futóindexet használhatunk, mi a cikkben általában a k betűt fogjuk. Az (1) összeget a továbbiakban az (a_n) sorozat egy (méghozzá az n-edik) *részletösszeg*ének fogjuk nevezni.

Mielőtt az Olvasó továbbhaladna, érdemes egy kis időt szánnia az OKTV feladat önálló megoldására, vagy legalábbis a megoldáson való töprengésre. A hivatalos és egyben talán legelegánsabb megoldást az alábbiakban ismertetjük.

A megoldás ötlete, hogy egy olyan összeggel becsüljük felülről, más szóval *majorál*juk L-et, amelyet meg tudunk adni zárt alakban. Ehhez vegyük észre, hogy mivel a $(h(n))$ sorozat (szigorúan) monoton növő, azért $k \geqslant 2$ esetén

$$\frac{1}{kh^2(k)} \leqslant \frac{\frac{1}{k}}{h(k-1)h(k)} = \frac{h(k)-h(k-1)}{h(k-1)h(k)} = \frac{1}{h(k-1)} - \frac{1}{h(k)}. \tag{2}$$

Ezt $k = 2$-től n-ig összegezve kapjuk, hogy

(3)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{kh^2(k)} \leqslant \left(\frac{1}{h(1)} \underbrace{-\frac{1}{h(2)}\Big) + \Big(\frac{1}{h(2)}}_{=0} \underbrace{-\frac{1}{h(3)}\Big) + \Big(\frac{1}{h(3)}}_{=0} - \frac{1}{h(4)}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{h(n-2)} \underbrace{-\frac{1}{h(n-1)}\Big) + \Big(\frac{1}{h(n-1)}}_{=0} - \frac{1}{h(n)}\right).$$

A (3) egyenlőtlenség jobb oldala egy úgynevezett *teleszkopikus összeg*, amelyben (a zárójelek elhagyásával) minden tag, az első és az utolsó kivételével, pozitív és negatív előjellel egyaránt szerepel, ezért kiesik, vagyis az összeg teleszkópszerűen (vagy gondolhatunk a zsebrádió antennájára) „összecsuklik". Következésképpen

$$\frac{1}{h^2(1)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{kh^2(k)} \leqslant \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{h(1)} - \frac{1}{h(n)} < \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{h(1)} = 2 \tag{4}$$

minden $n \geqslant 2$ esetén, speciálisan $n = 2012$ esetén is, amit bizonyítani akartunk. A (4) becslést röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kh^2(k)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

összegeknek a 2 egy felső korlátja.

2.3. Definíció. Egy (a_n) valós számsorozatot *felülről korlátos*nak nevezünk, ha van olyan K valós szám, hogy $a_n \leqslant K$ minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén. Ekkor K a sorozat egy *felső korlát*ja. Hasonlóan, az (a_n) sorozat *alulról korlátos*, ha $a_n \geqslant K$ minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén. Ekkor K a sorozat egy *alsó korlát*ja. Egy sorozatot *korlátos*nak mondunk, ha alulról és felülről is korlátos.

2.4. Példa. Az $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ sorozat egy felső korlátja az 1, az $a_n = n$ sorozat viszont felülről nem korlátos. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat alulról és felülről is korlátos.

Még egy pillanatra visszatérve az OKTV feladat megoldására, szinte tálcán kínálkozik az általánosítás lehetősége. Gondoljuk meg, hogy a $(h(n))$ sorozat helyett tetszőleges pozitív tagú (d_n) sorozat $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ részletösszegei vehetők, hiszen ekkor is alkalmazható a (2) becslés $h(k)$ helyett D_k-val. Valójában a következő tételt igazoltuk a fentiekben.

2.5. Állítás. *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat és részletösszeg-sorozata $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ekkor*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}D_k} = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_n} < \frac{1}{D_1} \qquad (n = 2, 3, \dots),$$

tehát a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^2} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{5}$$

összegek sorozata felülről korlátos (mégpedig $1/D_1$ egy felső korlátja).

2.6. *Megjegyzés.* A 2.5. Tételben a (d_n) sorozat pozitivitása helyett nyilván elegendő, hogy (d_n) nemnegatív tagú és $d_1 = D_1 > 0$.

Mivel az (5) összegek sorozata felülről korlátos, és természetesen monoton növekedő is egyben, ezért a jól ismert tétel szerint (lásd az [5] könyv 1. kötetének 138. oldalát vagy a [9] könyv 40. oldalán a 15. feladatot) $n \to \infty$ esetén szükségképpen van határértéke, tehát konvergens (a cikkben csak néhány helyen kerül elő a konvergencia fogalma, ezért azok is nyugodtan folytathatják az olvasást, akik még nem hallottak róla; egyébként az [5, 9] könyvek részletesen foglalkoznak a határérték-számítás témakörével).

2.7. Definíció. Legyen (a_n) tetszőleges valós számsorozat. Ha a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{6}$$

határérték létezik és véges, tehát egy S valós szám, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *(végtelen) sor* konvergens, és összege S. A $\sum_{k=1}^{n} a_k$ összegeket a sor *részletösszeg*einek szokás hívni (ezzel egyenértékűen mi az (a_n) sorozat részletösszegei elnevezést is használjuk, ha ez nem okoz félreértést). Ha a (6) határérték valamelyik végtelennel egyenlő vagy nem létezik, akkor a sort *divergens*nek mondjuk.

2.8. *Megjegyzés.* A 2.7. Definíció előtt tett megállapításunk alapján, ha egy sor nemnegatív tagú, azaz $a_n \geqslant 0$ minden n-re, és részletösszegei felülről korlátosak, akkor a sor konvergens. Ez visszafelé is igaz, hiszen ha egy tetszőleges valós számsorozat, legyen az akár egy részletösszeg-sorozat, konvergens, akkor korlátos (lásd az [5] könyv 1. kötetének 125. oldalát).

2.9. Példa. A $0+0+0+\dots$ sor konvergens és összege 0, hiszen a részletösszeg-sorozata az azonosan 0 sorozat, amelynek határértéke 0. Az $1 + 1 + 1 + \dots$ sor divergens, mert n-edik részletösszege n, amely $n \to \infty$ esetén végtelenhez tart. Az $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ sor $(2n + 1)$-edik részletösszege 1, $2n$-edik részletösszege pedig 0, így a részletösszegek sorozatának $n \to \infty$ esetén nincs határértéke, tehát a sor divergens.

Látszólag az $1-1+2-2+3-3+4-4+\dots$ sor összege 0, „mert minden tag kiesik”, azonban a részletösszeg-sorozata $1, 0, 2, 0, 3, 0\dots$, amelynek nyilván nincs határértéke, tehát a sor nem konvergens. Ez azt mutatja, hogy egy végtelen összeget általában nem zárójelezhetünk akárhogyan, mert ezáltal az összeg, sőt a konvergencia vagy divergencia ténye is megváltozhat.

Rögzített $q \neq 1$ valós számra az

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

úgynevezett *geometriai sor* n-edik részletösszege a geometriai sorozat első n tagjának összegképlete alapján

$$\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel $|q| < 1$ esetén $q^n \to 0$, így ekkor a geometriai sor konvergens, és

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

(Gondoljuk meg, hogy az iménti képlet mit adna $q = -1$ esetén, ha érvényes lenne, az $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ sor összegére.)

A továbbiakban célunk a 2.5. Állítás messzemenő általánosítása. Ezzel kapcsolatban természetes módon vetődik fel a következő kérdés.

2.10. Probléma. Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat és részletösszeg-sorozata $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ekkor milyen α valós szám esetén felülről korlátos a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{7}$$

összegek sorozata?

A cikk további részében a 2.10. Problémát teljesen megválaszoljuk, majd az eredmények néhány alkalmazását mutatjuk be. Látni fogjuk, hogy a problémához kapcsolódó kérdésekkel számos matematikus foglalkozott az elmúlt évszázadok folyamán.

3. Általánosítás: Pringsheim tétele

Kezdjük a 2.10. Probléma talán legegyszerűbb esetével! Ha $\alpha \geqslant 2$, akkor $x = D_1/D_k \leqslant 1$ választással $x^\alpha \leqslant x^2$, ezért

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} = \frac{1}{D_1^\alpha} \sum_{k=2}^{n} d_k \left(\frac{D_1}{D_k}\right)^\alpha \leqslant \frac{1}{D_1^\alpha} \sum_{k=2}^{n} d_k \left(\frac{D_1}{D_k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{D_1^{\alpha-2}} \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^2},$$

és így a 2.5. Állításból következően

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} \leqslant \frac{1}{D_1^{\alpha-2}} \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_n}\right) < \frac{1}{D_1^{\alpha-1}},$$

vagyis a (7) összegek sorozata ismét felülről korlátos. Megmutatjuk, hogy a felülről korlátosság $\alpha > 1$ esetén is érvényben marad. Sőt, ennél többet igazolunk, nevezetesen, minden $\beta > 0$ esetén a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}^{\beta} D_k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{8}$$

alakú összegek sorozata felülről korlátos. Ekkor $\beta = \alpha - 1 > 0$ választással a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^{\alpha}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^{\alpha-1} D_k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}^{\alpha-1} D_k}$$

becslésből következik a (7) összegek sorozatának $\alpha > 1$ esetén való korlátossága.

A (8) összeg becsléséhez legyen p tetszőleges pozitív egész szám, amelyre $1/p \leqslant \beta$, és tegyük fel, hogy $d_1 = D_1 \geqslant 1$. Ekkor azt állítjuk, hogy

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \leqslant p \left(\frac{1}{D_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_k^{\frac{1}{p}}} \right). \tag{9}$$

Valóban, az $u = D_{k-1}^{\frac{1}{p}}$ és $v = D_k^{\frac{1}{p}}$ jelölések bevezetésével $D_{k-1} \geqslant D_1 \geqslant 1$ és p választása folytán $D_{k-1}^{\beta} \geqslant u$, így

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \leqslant \frac{v^p - u^p}{uv^p}.$$

A jobb oldalt szorzattá alakítva, majd $u \leqslant v$ felhasználásával

$$\begin{aligned} \frac{v^p - u^p}{uv^p} &= \frac{(v-u)(v^{p-1} + v^{p-2}u + \ldots + vu^{p-2} + u^{p-1})}{uv^p} \leqslant \\ &\leqslant \frac{(v-u)pv^{p-1}}{uv^p} = p\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right), \end{aligned}$$

ahonnan a (9) egyenlőtlenség azonnan adódik. Tetszőleges $D_1 > 0$ esetén tekintsük a $\tilde{d}_k := d_k/D_1$ $(k = 1, 2, \dots)$ sorozatot, ekkor $\tilde{D}_k = D_k/D_1$, speciálisan $\tilde{d}_1 = \tilde{D}_1 = 1$, így érvényes a (9) becslés alábbi megfelelője:

$$\frac{\tilde{D}_k - \tilde{D}_{k-1}}{\tilde{D}_{k-1}^{\beta} \tilde{D}_k} \leqslant p \left(\frac{1}{\tilde{D}_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{\tilde{D}_k^{\frac{1}{p}}} \right).$$

Ebből egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \leqslant \frac{p}{D_1^{\beta - \frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{D_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_k^{\frac{1}{p}}} \right). \tag{10}$$

Visszatérve kiindulási célunkhoz, a (10) becslést alkalmazva végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{p}{D_1^{\beta - \frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{D_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_k^{\frac{1}{p}}} \right) = \frac{p}{D_1^{\beta - \frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{D_1^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_n^{\frac{1}{p}}} \right).$$

A fentiek alapján a 2.5. Állítás következő általánosítását nyertük, amelyet Alfred Pringsheim (1850–1941) német matematikus igazolt 1890-ben.

3.1. Tétel (Pringsheim, 1890). *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat és részletösszeg-sorozata $D_n := \sum_{k=1}^n d_k$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ekkor tetszőleges $\beta > 0$ szám esetén a*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^{1+\beta}} \qquad \textit{és} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

összegek sorozatai felülről korlátosak. Sőt, tetszőleges $p \geqslant 1/\beta$ pozitív egész számra fennáll a következő becslés:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^{1+\beta}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \leqslant \frac{p}{D_1^{\beta-\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{D_1^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_n^{\frac{1}{p}}} \right) < \frac{p}{D_1^{\beta}}. \tag{11}$$

3.2. *Megjegyzés.* Alfred Pringsheim főként a valós és komplex analízis területén alkotott jelentőset, emellett művészettörténettel és zenével is foglalkozott.

Most rövid kitérőt teszünk, hogy egy kicsit több analízis segítségével a (9) egyenlőtlenségnél erősebbet igazoljunk, illetve a (7) összegekre közvetlenül, a (8) összegek nélkül is adjunk felső becslést. A következő rész eredményeit a későbbiekben nem használjuk, ezért első olvasásra kihagyhatók (a (15) összefüggésre azért érdemes rápillantani), és az Olvasó nyugodtan a 4. szakaszra ugorhat.

Megmutatjuk, hogy (9) helyett $0 < \beta \leqslant 1$ esetén tetszőleges $D_1 > 0$ mellett

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \leqslant \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{D_{k-1}^{\beta}} - \frac{1}{D_k^{\beta}} \right),$$

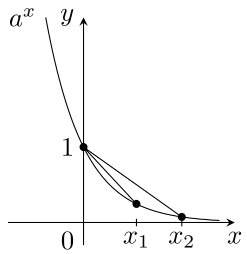
vagy ekvivalens módon

$$\frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{D_{k-1}}{D_k} \right)^{\beta} - 1 \right] \leqslant \frac{D_{k-1}}{D_k} - 1. \tag{12}$$

Mivel $D_{k-1} < D_k$, ezért elegendő igazolnunk, hogy rögzített $a < 1$ esetén az

$$f(x) := \frac{a^x - 1}{x} \qquad (x > 0)$$

függvény (szigorúan) monoton növő (nyilván $a = 1$ esetén is monoton növő), hiszen ekkor $a = D_{k-1}/D_k$ választással $\beta \leqslant 1$ esetén $f(\beta) \leqslant f(1)$, ami éppen a (12) egyenlőtlenség, és az is látható, hogy $\beta \geqslant 1$ esetén $f(\beta) \geqslant f(1)$. Vegyük észre, hogy $f(x)$ nem más, mint az a^x függvény grafikonjának a 0 és az x abszcisszájú pontjait összekötő húr meredeksége. Ez viszont x növelésével szigorúan monoton nő, ugyanis a^x szigorúan konvex függvény, ami éppen azt jelenti, hogy tetszőleges $[0, x]$ intervallumon a függvénygrafikon a végpontjait összekötő húr alatt fekszik (kivéve természetesen a végpontokat), lásd az 1. ábrát, illetve konvex függvényekről bővebben az [5] könyv 1. kötetének 294–296. oldalait és a [9] könyv 208. oldalán a 33. feladatot.



1. ábra. a^x konvexitása

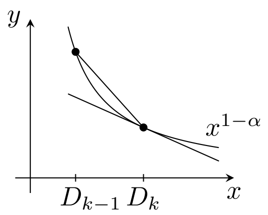
A konvexitás fogalmának segítségével az is megmutatható, hogy $\alpha > 1$ esetén

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{D_{k-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{D_k^{\alpha-1}}\right). \tag{13}$$

Valóban, a $g(x) = x^{1-\alpha}$ $(x > 0)$ függvény bevezetésével a (13) egyenlőtlenség a

$$\frac{g(D_k) - g(D_{k-1})}{D_k - D_{k-1}} \leqslant g'(D_k) \tag{14}$$

alakot ölti. Ez az egyenlőtlenség viszont következik a g függvény konvexitásából: g grafikonja bármely érintője fölött fekszik (kivéve nyilván az érintési pontot), így a D_k abszcisszájú pontba húzott érintő meredeksége (vagyis (14) jobb oldala) legalább akkora, mint a D_{k-1}, D_k abszcisszájú pontokat összekötő húr meredeksége (azaz (14) bal oldala), lásd a 2. ábrát. A (13) becslés segítségével a (7) összegekre végül a



2. ábra. $x^{1-\alpha}$ konvexitása

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{D_{k-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{D_k^{\alpha-1}}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{D_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{D_n^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{(\alpha-1)D_1^{\alpha-1}}\end{aligned} \tag{15}$$

felső becslést nyerhetjük, amely $\alpha - 1 = 1/p$ esetén egybevág a 3.1. Tétel (11) becslésével, különben pedig annál egy kissé erősebb.

4. Még tovább: Dini tétele

Hátravan még a (7) összeg vizsgálata a $0 < \alpha \leqslant 1$ esetben. Mielőtt rátérnénk, vegyük észre, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_1^\alpha} = \frac{1}{D_1^\alpha}\sum_{k=2}^{n} d_k = \frac{D_n - D_1}{D_1^\alpha}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha a (D_n) részletösszeg-sorozat felülről korlátos, akkor a (7) összegek sorozata is felülről korlátos *minden* α valós számra.

Ezentúl feltehető tehát, hogy a (D_n) részletösszeg-sorozat felülről nem korlátos. Megmutatjuk, hogy ekkor $0 < \alpha \leqslant 1$ esetén a (7) összegek sorozata sem felülről korlátos. Ezt elég belátni az $\alpha = 1$ esetben, hiszen $x = D_1/D_k \leqslant 1$ választással $0 < \alpha \leqslant 1$ esetén $x^\alpha \geqslant x$, így

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} = \frac{1}{D_1^\alpha}\sum_{k=2}^{n} d_k \left(\frac{D_1}{D_k}\right)^\alpha \geqslant \frac{1}{D_1^\alpha}\sum_{k=2}^{n} d_k \frac{D_1}{D_k} = D_1^{1-\alpha}\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k}.$$

A nemkorlátosságot először egy speciális esetben igazoljuk, az általános eset bizonyítása pedig annak mintájára történik. Tekintsük tehát a speciális $d_k = 1$

$(k = 1, 2, \ldots)$ konstans sorozatot, és legyen $\alpha = 1$! Ekkor $D_k = k$, így

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

A fenti összeg nemkorlátosságát már Nicole Oresme (1320 körül–1382) francia filozófus és matematikus (aki később Lisieux város püspöke is volt) 1350 körül belátta. Bizonyításának ötlete, hogy $n = 2^\ell$ választással ℓ növelésével tetszőlegesen nagy alsó becslést kaphatunk a következő módon:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac14+\frac14} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{>\frac18+\ldots+\frac18} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{\ell-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^\ell}}_{>\frac{1}{2^\ell}+\ldots+\frac{1}{2^\ell}} > \\ > \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{\ell-1}\frac{1}{2^\ell} = \frac{\ell}{2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Az előbbi becslést nevezhetjük *kondenzációs* eljárásnak, amelynek lényege az egymás utáni tagok kondenzációja, más szóval sűrítése, összenyomása. Érdemes meggondolni, hogyan módosul a bizonyítás 2 hatványai helyett 10 hatványaival. A (16) egyenlőtlenségből, valamint annak ellenkező irányú párjából konkrét becslés nyerhetünk az első n pozitív természetes szám reciprokösszegére.

4.1. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2}[\log_2 n] + 1 \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant [\log_2 n] + 1, \tag{17}$$

ahol $[x]$ az x egészrésze, vagyis a legnagyobb x-nél nem nagyobb egész szám.

4.2. *Megjegyzés.* Ha egy $\sum_{k=1}^\infty a_k$ sor konvergens, vagyis összege egy S valós szám, akkor

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} S - S = 0,$$

tehát $a_n \to 0$ a sor konvergenciájának szükséges feltétele. A (16) példa mutatja, hogy e feltétel nem elegendő, hiszen $1/n \to 0$, de a $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ sor divergens, mert részletösszegei felülről nem korlátosak.

Az általános esetben a (7) összegek $\alpha = 1$ mellett való nemkorlátosság igazolása a (16) egyenlőtlenséghez hasonló alsó becsléssel (*minorálás*sal) történik. Először is rögzítsünk egy tetszőleges n_0 indexet! Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{d_{n_0+1}}{D_{n_0+1}} + \frac{d_{n_0+2}}{D_{n_0+2}} + \ldots + \frac{d_{n_0+n}}{D_{n_0+n}} &\geqslant \frac{d_{n_0+1} + d_{n_0+n} + \ldots + d_{n_0+n}}{D_{n_0+n}} = \\ &= \frac{D_{n_0+n} - D_{n_0}}{D_{n_0+n}} = 1 - \frac{D_{n_0}}{D_{n_0+n}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Mivel a (D_n) sorozat felülről nem korlátos, ezért (a rögzített n_0-hoz) található olyan $n_1 > n_0$ index, hogy $D_{n_0}/D_{n_1} \leqslant 1/2$, így a (18) egyenlőtlenségben $n = n_1 - n_0$ választással

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{d_k}{D_k} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Az előbbi gondolatmenetet n_0 helyett az n_1 indexszel végrehajtva hasonlóan nyerünk egy n_2 indexet úgy, hogy a (19) egyenlőtlenség mintájára

$$\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{d_k}{D_k} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Az eljárást folytatva végül egy olyan (n_ℓ) indexsorozatot kapunk, amelyre

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_\ell} \frac{d_k}{D_k} = \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{d_k}{D_k} + \ldots + \sum_{k=n_{\ell-1}+1}^{n_\ell} \frac{d_k}{D_k} \geqslant \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Következésképpen a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{20}$$

sorozat felülről nem korlátos. Vegyük észre, hogy a $d_k = 1$ speciális esetben Oresme bizonyításában (vagyis a (16) becslésben) éppen $n_\ell = 2^\ell$.

A kapott eredményt Pringsheim tételével és a (15) becsléssel, illetve a szakasz elején írottakkal összevetve Ulisse Dini (1845–1918) olasz matematikus egy 1867-es eredményét nyerjük, amellyel a 2.10. Problémát teljesen megválaszoltuk.

4.3. Tétel (Dini, 1867)**.** *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat, amelynek részletösszeg-sorozata $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ felülről nem korlátos. Ekkor a*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

összegek sorozata $\alpha \leqslant 1$ esetén felülről nem korlátos, $\alpha > 1$ esetén felülről korlátos, méghozzá

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} < \frac{1}{(\alpha-1)D_1^{\alpha-1}}.$$

Más szóval a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{D_k^\alpha}$$

sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leqslant 1$ esetén pedig divergens. Amennyiben a (D_n) részletösszeg-sorozat felülről korlátos, akkor a (21) összegek sorozata is felülről korlátos minden α valós szám esetén.

4.4. *Megjegyzés.* Dini főként a valós egyváltozós függvények területén kutatott, az általánosítás és az ellenpéldák mestere volt. A 4.3. Tételt az általunk közölt bizonyításoktól eltérő módon igazolta, és jelentősen általánosította.

5. Kitérő: Abel tétele

A 4.3. Tétel $\alpha = 1$ esetének 4. szakaszbeli bizonyítása kapcsán érdemes egy rövid kitérőt tennünk, hogy megismerkedjünk Niels Henrik Abel (1802–1829) norvég matematikus egy eredményével. A (20) összeg helyett most a

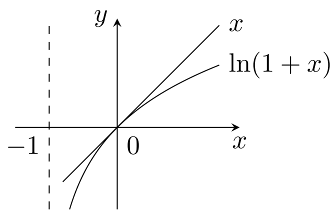
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{22}$$

alakú összegeket fogjuk tanulmányozni. Az ötlet, amelyet az alábbiakban ismertetünk Abeltől származik. Először írjuk át a (22) összeget a következő alakba:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{D_k}{D_{k-1}} - 1 \right). \tag{23}$$

Ezután alkalmazzuk az

$$\ln(1+x) \leqslant x \qquad (x > -1) \tag{24}$$



3. ábra. $\ln(1+x) \leqslant x$

egyenlőtlenséget (ahol ln az e alapú, más szóval a természetes logaritmust jelöli; az $e \approx 2,718$ számról bővebben lásd a [3] cikket)! Ez egyszerűen következik abból, hogy az $\ln(1+x)$ függvény érintőjének meredeksége az $x = 0$ pontban az $(\ln(1+x))' = 1/(1+x)$ derivált 0-beli értéke, vagyis 1, tehát az érintő az $y = x$ egyenletű egyenes. Mivel az $\ln(1+x)$ függvény konkáv, ezért a grafikonja tetszőleges érintője alatt fekszik, amiből $\ln(1+x) \leqslant x$ rögtön adódik (lásd a 3. ábrát). Ekkor a (24) egyenlőtlenségből következően

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{D_k}{D_{k-1}} - 1 \right) \geqslant \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{D_k}{D_{k-1}} = \sum_{k=2}^{n} (\ln D_k - \ln D_{k-1}).$$

Ez utóbbi ismét egy teleszkopikus összeg, így végül a (23) egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k} \geqslant \ln D_n - \ln D_1.$$

Ezzel beláttuk Abel egy 1828-ban igazolt tételét.

5.1. Tétel (Abel, 1828)**.** *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat, amelynek $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ $(n = 1, 2, \dots)$ részletösszeg-sorozata felülről nem korlátos. Ekkor a*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}} \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

összegek sorozata felülről nem korlátos, vagyis a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{D_{k-1}}$$

sor divergens. Érvényes továbbá a következő becslés:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}} \geqslant \ln D_n - \ln D_1.$$

5.2. *Megjegyzés.* Abel talán legismertebb eredménye az ötöd- és magasabb fokú egyenletek gyökjelekkel való megoldhatatlanságának bizonyítása. Ez annyit jelent, hogy a másod-, harmad- és negyedfokú egyenletekkel ellentétben, nem létezik általános megoldóképlet magasabb fokú algebrai egyenletekre. Abel ezenkívül maradandót alkotott többek között a csoportelmélet, az elliptikus függvények, a sorelmélet területén is. Nagyon fiatalon, 26 éves korában halt meg tüdőgyulladásban.

Az Abel–Dini-féle tételekről a [8] könyv 1. kötetének 586–589. oldalain, illetve a [2] könyv 290–293. oldalain olvashatunk, ahol megtalálhatók az idézett eredmények eredeti hivatkozásai is (a [2] könyv a sorelmélet alapműve, amely digitálisan elérhető a [11] archívumban). Az előzőekben mi is e két könyv felépítését követtük, néhol kiegészítve az eredményeket. A [4, 6, 9] könyvek rengeteg kidolgozott feladatot tartalmaznak a sorok témaköréből, és kifejezetten ajánlhatók középiskolások számára. A végtelen sorok történetéről a kiváló [4] könyvben és a [7] cikkben olvashatók további érdekességek.

6. Alkalmazás: hiperharmonikus sorok

Miután a 2.10. Problémát kimerítően megoldottuk, következhetnek az alkalmazások. Kezdjük rögtön a kiindulási OKTV feladatunkkal! Amint a 4. szakasz elején Oresme kondenzációs módszerével láttuk, hogy a

$$h(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{25}$$

sorozat felülről nem korlátos, így Dini tételéből következően $\alpha > 1$ esetén

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k h^{\alpha}(k)} < \frac{1}{(\alpha - 1) D_1^{\alpha - 1}} = \frac{1}{\alpha - 1},$$

ami $\alpha = 2$ esetén az OKTV feladat állítását adja (sőt Dini tételéből azt is tudjuk, hogy a kérdéses sorozat $\alpha \leqslant 1$ esetén felülről nem korlátos).

A $(h(n))$ részletösszegek által meghatározott

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

sort szokás *harmonikus sor*nak nevezni. Ennek divergenciájára talán az említett Oresme-féle bizonyítás a legismertebb. Az érdekesség kedvéért mutatunk még egy gondolatmenetet, amely Pietro Mengoli (1626–1686) olasz matematikustól származik. A közvetlenül (vagy a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség segítségével) igazolható

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x} \qquad (x > 1) \tag{26}$$

egyenlőtlenség alkalmazásával (és a (25) jelöléssel)

$$h(3n+1) = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{3}{3}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{> \frac{3}{6}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}}_{> \frac{3}{3n}} >$$

$$> 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + h(n),$$

amiből azonnal adódik, hogy $h(4) > 2$, $h(13) > 3$, $h(40) > 4$ stb., vagyis a $(h(n))$ sorozat felülről nem korlátos. Vegyük észre, hogy a fenti Mengoli-féle bizonyítás is a kondenzáció módszerére épült.

A harmonikus sor részletösszegeire Abel tétele alapján az is igaz, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geqslant \ln n,$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1). \tag{27}$$

6.1. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1. \tag{28}$$

(*Útmutatás*: alkalmazzuk a (24) egyenlőtlenséget $x = -1/k$ választással!)

A (27) és (28) becslésekből (amelyeket érdemes összevetni a korábbi (17) becslésekkel) jól látható, hogy a harmonikus sor részletösszegei ugyan felülről nem korlátosak, ám „rendkívül lassan” nőnek: például ahhoz, hogy az összeg 100-nál nagyobb legyen körülbelül $1,5 \cdot 10^{43}$ tagot kell összeadni.

Valójában igazolható (lásd az [5] könyv 2. kötetének 196–197. oldalait vagy a [9] könyv 69. oldalán a 32. feladatot), hogy létezik és véges a

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

határérték, amelyet *Euler-féle állandó*nak szokás nevezni. A határérték Leonhard Euler (1707–1783) egy 1734-es cikkében jelent meg először, értéke három tizedes jegyre kerekítve 0,577. Máig megoldatlan kérdés, hogy γ racionális vagy irracionális szám-e. Végül érdekességképpen megemlítjük, hogy a harmonikus sort a prímszámok reciprokösszegére „megritkítva” még mindig divergens sort kapunk (lásd az [5] könyv 2. kötetének 210–213. oldalait), viszont a 9-es számjegyet nem tartalmazó pozitív egész számok reciprokösszege véges (lásd az [5] könyv 2. kötetének 198–200. oldalait).

Dini tételének másik alkalmazásaként tekintsük újra a $d_k = 1$ konstans sorozatot! Ekkor azt kapjuk, hogy a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

összeg $0 < \alpha \leqslant 1$ esetén felülről nem korlátos, azonban $\alpha > 1$ esetén felülről korlátos. Ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{29}$$

úgynevezett *hiperharmonikus sor* $\alpha > 1$ esetén konvergens, $0 < \alpha \leqslant 1$ esetén pedig divergens.

6.2. Feladat. Igazoljuk a kondenzációs módszer segítségével (lásd a (16) becslést), hogy a (29) sor konvergens! (*Útmutatás*: egy 2^k hosszú szelet minden tagját becsüljük felülről a legnagyobb taggal!)

Speciálisan $\alpha = 2$ esetén kapjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{30}$$

sor konvergens, amely összegének konkrét meghatározását először Pietro Mengoli vetette fel. A kérdés akkor vált igazán ismertté, és ragadt rá a *bázeli probléma* elnevezés, amikor a svájci Bázel városából származó Bernoulli család egymással folyton versengő matematikus fivérei, Jakob (1654–1705) és Johann (1667–1748) elkezdték törni a fejüket rajta. Jakob Bernoulli 1689-ben belátta, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{n}. \tag{31}$$

(Lényegében ezt a becslést használtuk mi is a 2.5. Állítás bizonyításában.) Megjegyezzük azonban, hogy Bernoulli nem teleszkopikus összegként való felírással kapta az utóbbi egyenlőséget, hanem kissé bonyolultabban. Elsőként Isaac Newton (1643–1727) írta fel teleszkopikus összeg alakban 1715-ben.

A (30) sor összegét végül Leonhard Euler (1707–1783) határozta meg először, aki ugyancsak bázelből származott, és a tanítója Johann Bernoulli volt, tőle ismerte meg a problémát. Euler 24 éves korában az összeget több tizedes jegy pontossággal kiszámolta, és a következő sejtésre jutott, amelyet 3 év múlva, 1734-ben igazolni is tudott:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{32}$$

Az eredmény és Euler bizonyítása bámulatos, ahogy Johann Bernoulli fogalmazott: „Bárcsak a bátyám megérhette volna ezt!”. (Euler bizonyítását illetően lásd a [7] cikket; Euler eredeti cikke és angol fordítása elérhető a [10] archívumban az E41 jelzéssel; további bizonyítások olvashatók az [5] könyv 2. kötetének 207–210. oldalain vagy a [9] könyv 74. oldalán szereplő 75. feladat megoldásában, illetve a [4] könyv 45–58. oldalain.) Megjegyezzük, hogy $\pi^2/6 \approx 1,645$, amiből képet kaphatunk a (31) becslés pontosságáról (vagy inkább pontatlanságáról).

Később Euler általánosan is megmutatta, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \pi^{2m},$$

ahol B_{2m} jelöli az úgynevezett Bernoulli-számokat. Például $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, így kapjuk a (32) összefüggést, illetve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Páratlan kitevő esetén nem ismert zárt alak a hiperharmonikus sor összegére, sőt a páratlan esetben $\alpha = 3$ kivételével még azt sem tudni, hogy az érték racionális vagy irracionális-e. Az $\alpha = 3$ esetben irracionális, ezt Roger Apéry (1916–1994) francia matematikus 1978-ben Helsinkiben a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson tartott előadásában igazolta.

A szakaszt egy másik érdekes sorral zárjuk.

6.3. Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}$$

sor pontosan $\alpha > 1$ esetén konvergens. (*Útmutatás*: a (27), (28) összefüggések segítségével majoráljunk, minoráljunk és használjuk a szakasz elején tett megállapításokat; oldjuk meg a feladatot a kondenzációs módszerrel is, lásd a [9] könyv 342. oldalán a 4/f feladatot.)

6.4. *Megjegyzés.* Louis Olivier, akinek kilétéről szinte semmit sem tudni, 1827-ben egy cikkében azt állította, hogy ha $na_n \to 0$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens. A 6.3. Feladat alapján látjuk, hogy ez nem igaz, hiszen $n\dfrac{1}{n\ln n} = \dfrac{1}{\ln n} \to 0$, de a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln k}$ sor nem konvergens. Olivier állítását Abel cáfolta meg 1828-ban az iménti példával, illetve igazolta az 5.1. Tételt. Sőt, megmutatta, hogy nincs olyan $\varphi(n)$ függvény, amellyel egy sor pontosan akkor konvergens, ha $\varphi(n)a_n \to 0$.

7. Kapcsolat: egy 1989. évi OKTV feladat

Kiindulási OKTV feladatunk közeli rokonságban áll egy 23 évvel ezelőtti feladattal (ki tudja, talán a kitűző személye is ugyanaz). Az 1988/1989. tanévi matematika OKTV döntő fordulójában a II. kategória (akkoriban alaptantervű gimnazisták) számára kitűzött 3. feladat a következő volt (lásd a KöMaL 1989. novemberi számának 354–357. oldalait, illetve a [12, 16] honlapokat).

7.1. Feladat (OKTV 1988/89)**.** Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszés szerinti, 3-nál nem kisebb pozitív egész számot jelöl, akkor

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}. \tag{33}$$

A feladat megoldásával ismét érdemes először önállóan megpróbálkozni, talán az előzőek alapján már nem olyan nehéz. Mielőtt rátérnénk a hivatalos megoldásra, csábítónak tűnik Dini tételének alkalmazása, hiszen a (33) egyenlőtlenség bal oldala majdnem a hiperharmonikus sor egy részletösszege $\alpha = 3$ esetén. A $d_1 = 2$, $d_k = 1$ $(k \geqslant 2)$ és $\alpha = 3$ választással Dini tételéből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^2} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8}.$$

Emögött a (14) becslés áll, amely most a közvetlenül is ellenőrizhető

$$\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

alakot ölti. Látjuk, hogy ebből az egyenlőtlenségből a (33) összegre nem adódik a kívánt felső becslés, ezért egy erősebbel kell probálkoznunk. Azonnal kínálkozik, hogy a (31) ötlet mintájára a $(k-2)(k-1)k < k^3$ becslést használjuk. Világos, hogy a végén minél pontosabb felső becslést szeretnénk nyerni a (33) egyenlőtlenség bal oldalára, ezért vegyük észre, hogy az előbbinél van egy még jobb becslés, mégpedig $(k-1)k(k+1) = k^3 - k < k^3$. Ez utóbbit alkalmazva

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}. \tag{34}$$

Adódik a kérdés, vajon (34) jobb oldalát fel tudjuk-e írni teleszkopikus összeg alakban? A válasz, igen, méghozzá

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right). \tag{35}$$

Ekkor

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{n(n+1)}\right) < \frac{1}{12},$$

amit bizonyítani akartunk. Megjegyezzük, hogy a (35) átalakítás helyett alkalmazható az alábbi úgynevezett parciális törtekre bontás is (amelyből a (26) egyenlőtlenség is azonnal adódik):

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

Ám ezt összegezve kissé bonyolultabb teleszkopikus összeget kapunk, amelyben majdnem minden tag kétszer $(+1)$ és egyszer (-2) szorzóval szerepel. Oda kell tehát figyelni, hogy mi esik ki, és mi marad a végén, a részletek kidolgozását az Olvasóra bízzuk. A (34) becslés pontosságát illetően megemlítjük, hogy a bal oldal értéke közelítőleg 0,077, míg $1/12 \approx 0,083$.

A fentiek alapján azonnal adódik a következő általános összefüggés, amelyet már Mengoli is ismert (1650-es művében számos hasonló összeget kiszámolt). E formula lehetőséget ad a (33) egyenlőtlenség tetszőleges kitevőre való általánosítására, amelyeket az Olvasó önállóan meggondolhat.

7.2. Állítás. *Legyen m rögzített pozitív egész szám. Ekkor*

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (m+1)} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m+2)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+m)} =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1\cdot \ldots \cdot m} - \frac{1}{(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+m)}\right).$$

Végezetül a 7.2. Állítás „párját” tűzzük ki feladatként (további feladatok találhatók a [6] könyv 10., valamint 18–19. oldalain).

7.3. Feladat. Legyen m rögzített nemnegatív egész szám. Ekkor

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (m+1) + 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m+2) + \ldots + n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+m) =$$
$$= \frac{1}{m+2}n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+m+1).$$

(*Útmutatás*: sejtsük meg a teleszkopikus összegként való felírást!)

8. Ráadás: hatvány- és trigonometrikus összegek

Cikkünk lezárásaként a teleszkopikus összegeknek még néhány alkalmazási lehetőségét mutatjuk be. Bizonyára sokan ismerik Carl Friedrich Gaussról (1777–1855) a következő anekdotát (a történet hitelességében többen kételkednek). A kis Gauss tanórai rossz viselkedése miatt büntetésül egyszer azt a feladatot kapta, hogy az $1+2+\ldots+99+100$ összeget számítsa ki, ám Gauss, tanára óriási meglepetésére, másodpercek alatt megadta a helyes választ. Az ötlete az volt, hogy párokban adjuk össze a számokat, $1+100=101, 2+99=101, \ldots, 50+51=101$, és mivel 50 ilyen párt tudunk képezni, így az összeg $101 \cdot 50 = 5050$.

Most egy másik módszert mutatunk az első n pozitív egész szám összegének meghatározására, amely általánosítható hatványösszegekre is. Csupán azt az egyszerű észrevételt kell használnunk, hogy $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, amelyet $k=1$-től n-ig összegezve a bal oldalon egy teleszkopikus összeg jelenik meg, így

$$(n+1)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

ahonnan

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{36}$$

Vegyük észre, hogy a 7.3. Feladat $m=0$ esetén éppen a (36) összefüggést adja, ezért érdemes végiggondolni milyen bizonyítást nyerünk ezáltal erre az összefüggésre.

Az előbbiek mintájára határozzuk meg zárt alakban az első n pozitív egész szám négyzetösszegét:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = ?$$

Most a $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ azonosságot összegezzük 1-től n-ig, így

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Ebből következően a már ismert (36) összefüggés felhasználásával

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{3}(n+1)\left((n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\right),$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{37}$$

Természetesen, ha valaki „megsúgta” a (36) és (37) összefüggéseket, akkor teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk azokat (gondoljuk át a bizonyításokat!). A fenti gondolatmenet azonban eljárást is ad hatványösszegek meghatározására tetszőleges pozitív egész kitevő esetén.

8.1. Feladat. Adjuk meg zárt alakban a

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \qquad \text{és} \qquad 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$$

összegeket!

Még hosszasan sorolhatnánk a különféle alkalmazásokat, amelyekben teleszkopikus összegek fordulnak elő, ízelítőül néhány trigonometrikus összefüggést említünk meg feladat formájában. Két klasszikus összefüggés, amelyek a sorok elméletében gyakran felbukkannak, az alábbi (lásd még a [6] könyv 40–41. oldalait és az [1] feladatgyűjtemény II. kötetének 423. feladatát).

8.2. Feladat. Igazoljuk, hogy $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ esetén

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

és

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

(*Útmutatás*: használjunk a $\sin u \sin v$ szorzatra vonatkozó addíciós összefüggést!)

Végül egy „kemény dió" a KöMaL 2004. decemberi számának B. 3781. feladata (amelynek nem teleszkopikus összeget használó mintamegoldása olvasható a 2005. októberi szám 413–414. oldalain, lásd a [12] honlapot).

8.3. Feladat. Határozzuk meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(2n^2\right)$ összeg értékét, ahol arcctg a ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumon vett inverzét jelöli. (*Útmutatás*: alkalmazzunk az $(\operatorname{arcctg} u - \operatorname{arcctg} v)$ kifejezésre vonatkozó addíciós összefüggést!)

9. Zárszó

Az előzőekben egy versenyfeladat kapcsán számos matematikussal és eredményeikkel, valamint ehhez kapcsolódó érdekességekkel ismerkedtünk meg. Az említett matematikusok műveinek nagy része egy kattintással mindenki számára (legálisan!) elérhető a világhálón (az életrajzokat illetően a kiváló [13] oldalt ajánljuk, eredeti cikkek pedig a [14] archívumban találhatók). Nagyszerű matematikusok eredeti gondolatainak és ötleteinek olvasása nemcsak élvezetes (de gyakran nem könnyű), hanem a nyelvtanulás szempontjából is hasznos tanár és diák számára egyaránt. Remélhetőleg a cikkel többek érdeklődését sikerült felkelteni, vagy még jobban elmélyíteni a problémamegoldás és a matematikatörténet iránt.

Hivatkozások

[1] Horvay Katalin, Reiman István, *Geometriai feladatok gyűjteménye I–II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.

[2] K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Blackie & Son, Ltd., London, 1954.

[3] Kós Rita, Kós Géza, Miért természetes az e?, *KöMaL*, 2003/5, 258–264. `http://www.komal.hu/cikkek/kg/e/e.h.shtml`

[4] Németh József, *Előadások a végtelen sorokról*, Polygon Könyvtár, Polygon, Szeged, 2002.

[5] Pintér Lajos, *Analízis 1–2. (a gimnázium speciális matematika osztályai számára)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. (újabb kiadás: TypoTEX, 2006.)

[6] Rábai Imre, *Elemi matematikai példatár III. (Sorozatok, sorok, válogatott feladatok)*, Gondolat, Budapest, 1976.

[7] Simonovits András, A végtelen sorok felfedezése I–II., *KöMaL*, 2007/7, 392–399. és 2007/8, 450–456.

[8] Szász Pál, *A differenciál- és integrálszámítás elemei 1–2.*, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951. (újabb kiadás: TypoTEX, 2009.)

[9] Urbán János, *Határérték-számítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975. (újabb kiadás: 2006.)

Internetes oldalak:

[10] Euler Archive: `http://www.math.dartmouth.edu/~euler`

[11] Internet Archive: `http://archive.org`

[12] KöMal archívum: `http://db.komal.hu/KomalHU`

[13] MacTutor History of Mathematics archive: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

[14] Német Digitális Folyóiratarchívum: `http://www.digizeitschriften.de`

[15] Oktatási Hivatal: `http://www.oh.gov.hu`

[16] Versenyvizsga Portál: `http://www.versenyvizsga.hu`