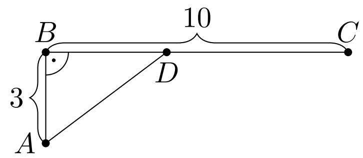
Séta a havon – az ezerarcú feladat

Besenyei Ádám (badam@cs.elte.hu)

A változatosság gyönyörködtet – tartja a mondás. Egy matematikai probléma szépségét például gyakorta a megoldáshoz vezető utak sokszínűsége és egymásba fonódása adja. A különféle nézőpontok szerepet játszhatnak a mélyebb megértésben és egymástól távolinak tűnő területek összekapcsolásában, amint ennek a KöMaL hasábjain sűrűn szemtanúi lehetünk. Írásunkban is éppen a megoldások roppant gazdagságának érzékeltetését tűzzük ki célul, méghozzá a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium matematika munkaközössége által összeállított és a 2016. márciusi számban megjelent, az emelt szintű matematika érettségire való gyakorlást szolgáló feladatsor egy szélsőérték-feladata kapcsán.

Feladat. Egy gyalogos a hóval borított mező A pontjában van, 3 kilométernyire a BC egyenes úttól (az 1. ábrán $AB = 3$ km, $BC = 10$ km). Az országúton a gyalogos kétszer akkora sebességgel halad, mint a hómezőn. Mely D pontban kell kimennie a gyalogosnak az útra, hogy a legrövidebb idő alatt jusson el C-be?

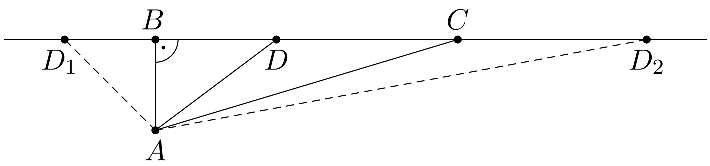


1. ábra

Az áprilisi számban a kitűzők igazán tetszetős módon négy különböző megoldását mutatták be az iménti feladatnak: egy algebrai, egy függvénytani és egy elemi geometriai utat, valamint az optika Snellius–Descartes-féle fénytörési törvényén alapuló fizikai szemléletű megközelítést. Célunk, hogy mindezt megtoldjuk további megoldásokkal, segítségül hívva nevezetes egyenlőtlenségeket és a mechanikát. Felbukkan a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség, a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, valamint a húrnégyszögek Ptolemaiosz-egyenlőtlensége. Szó esik ezenkívül még az Euler-féle helyettesítésekről, négyzetszámok táblázatairól, hullámfrontokról, erők eredőjéről és mindemellett a matematikatörténeti érdekességek sem maradnak el. Közben pedig számos töprengési lehetőséget és bőséges olvasnivalót kínálunk az érdeklődő Olvasó számára. Javasoljuk, hogy a továbbhaladás előtt próbálkozzon meg minél többféle megoldás önálló kigondolásával, majd ezután az áprilisi szám megfelelő oldalaira ugyancsak érdemes visszalapoznia. A megoldások színes és szerteágazó sokaságán keresztül remélhetőleg feltárulnak a feladat rejtett kincsei és alkalom nyílik a gyönyörködésre.

1. Kezdeti lépések a havon

Jóllehet a feladat szövege és az 1. ábra is azt sugallja, hogy a D pontnak a BC szakaszon kell lennie, mindenesetre nem árt meggondolnunk, hogy az időben legrövidebb út szempontjából a BC egyenes többi pontját kizárhatjuk. Valóban, ha a 2. ábrán látható módon a D_1 pont a BC egyenesen B-től balra van, akkor nyilván $BC < D_1C$, továbbá az ABD_1 derékszögű háromszögben AD_1 átfogó, ezért $AB < AD_1$. Következésképpen az ABC töröttvonal mindkét szakasza rövidebb az AD_1C töröttvonal megfelelő szakaszainál, így a megtételükhöz is kevesebb idő kell, tehát van az AD_1C töröttvonalnál időben rövidebb út. Amennyiben egy, a C-től jobbra eső D_2 pontot tekintünk, akkor $D_2CA\sphericalangle$ tompaszög (miért?), emiatt a D_2CA háromszögben AD_2 a leghosszabb oldal, így már önmagában az AD_2 út megtétele több időbe telik, mint egyszerűen az AC szakaszon végigmenni.



2. ábra

Ezek után legyen a gyalogos sebessége a hómezőn v, az országúton pedig $2v$ (ahol $v > 0$), ekkor az ADC töröttvonal út megtételéhez szükséges idő:

$$\frac{AD}{v} + \frac{DC}{2v} = \frac{1}{v}\left(AD + \frac{DC}{2}\right). \tag{1.1}$$

Világos, hogy a minimum helyének szempontjából v nem játszik szerepet, ezért elég csupán a zárójelben lévő kifejezést vizsgálni (más szóval feltehető $v = 1$), amelyet írjunk fel a D pont B-től (km-ben) mért távolságának függvényében a KöMaL áprilisi számában közölt első megoldáshoz hasonlóan.

Ha $BD = x$, ahol $0 \le x \le 10$, akkor $DC = 10 - x$, továbbá az ADB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján $AD = \sqrt{x^2 + 9}$, így

$$AD + \frac{DC}{2} = \sqrt{x^2 + 9} + \frac{10 - x}{2}. \tag{1.2}$$

Elegendő tehát az

$$f(x) := \sqrt{x^2 + 9} + \frac{10 - x}{2} \tag{1.3}$$

függvény minimumának helyét megkeresni $0 \le x \le 10$ esetén. Az áprilisi szám 204–206. oldalain erre két okoskodást olvashattunk: az egyik egy másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsának vizsgálatára vezeti vissza a kérdést, a másik pedig differenciálszámítás segítségével adja meg a szélsőértékhelyet. Most az (1.3) hozzárendelési szabályban szereplő négyzetgyök kiküszöbölésére először egy rafinált helyettesítést mutatunk.

2. Egy ravasz gondolat

A szakasz gondolatmenete a „hómezős” feladattal együtt megtalálható Hódi Endre (1923–2003) – aki sok éven át a matematikai diákolimpiai csapat kísérője és a tehetséggondozás aktív szereplője volt – szélsőérték-feladatok elemi megoldásáról szóló remek könyvecskéjében (lásd [7, 109–112. feladat]). A megoldásnak erre az ötletére e sorok írójának figyelmét Németh József, a szegedi Bolyai Intézet kitűnő oktatója hívta fel, aki a mindennapi életben előforduló szélsőérték-problémákról tartott előadásában a hómezős feladat olajvezeték építési költségének minimalizálására átfogalmazott változatát (lásd [14, 8. feladat]) oldotta meg az egykori mesterétől, – a nemzetközileg kiemelkedő matematikus és tanáregyéniség – Kalmár Lászlótól (1905–1976) tanult elemi módszerrel. Lássuk az ötletet!

Célunk, hogy az (1.3) kifejezésben szereplő négyzetgyök használatát egy ügyes helyettesítéssel elkerüljük. Ehhez induljunk ki a jól ismert

$$(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv, \tag{2.1}$$

algebrai azonosságból. Ha most $v = \frac{1}{4u}$, akkor ebből átrendezés után

$$\left(u - \frac{1}{4u}\right)^2 + 1 = \left(u + \frac{1}{4u}\right)^2$$

adódik. Még praktikusabb, ha az iménti összefüggés 9-szeresét tekintjük:

$$\left[3\left(u - \frac{1}{4u}\right)\right]^2 + 9 = \left[3\left(u + \frac{1}{4u}\right)\right]^2, \tag{2.2}$$

hiszen ez nyomban az $x = 3\left(u - \frac{1}{4u}\right)$ vagy $x = -3\left(u - \frac{1}{4u}\right)$ helyettesítést sugallja. Ekkor ugyanis $u > 0$ feltételezésével (2.2) alapján

$$\sqrt{x^2+9} = 3\left(u + \frac{1}{4u}\right). \tag{2.3}$$

Ha például az

$$x = 3\left(u - \frac{1}{4u}\right) \tag{2.4}$$

helyettesítést választjuk, akkor

$$\sqrt{x^2+9} + \frac{10-x}{2} = 3\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{8u}\right) + 5. \tag{2.5}$$

Ezáltal a minimalizálandó kifejezésünk egy csapásra olyan alakot öltött, amely tálcán kínálja a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazását: tetszőleges u pozitív számra

$$3\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{8u}\right) + 5 \geq 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \frac{3}{8u}} + 5 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 5. \tag{2.6}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $u/2 = 3/(8u)$, ahonnan $u > 0$ folytán $u = \sqrt{3}/2$ következik, és ekkor a (2.4) helyettesítés értelmében $x = \sqrt{3}$. Mivel ez megfelel a $0 \leq x \leq 10$ kívánalomnak, így a (2.5) és (2.6) összefüggések figyelembevételével azt kapjuk, hogy az f függvény a $[0, 10]$ intervallumon a minimumát az $x = \sqrt{3}$ pontban veszi fel (és a minimum értéke $3\sqrt{3}/2 + 5$).

Álljunk csak itt meg egy pillanatra, biztosan nem felejtettünk el semmit az előbbi gondolatmenetben? Hogyan is okoskodtunk? Meghatároztuk a (2.5) azonosság jobb oldalának minimumhelyét a pozitív u számok halmazán és ebből a bal oldali kifejezés $0 \leq x \leq 10$ esetén vett minimumának helyére következtettünk. De milyen x értékekre érvényes egyáltalán a szóban forgó (2.5) azonosság? Olyan x valós számokra, amelyek előállnak (2.4) alakban valamilyen $u > 0$ esetén. Vajon előáll minden $x \in [0, 10]$ szám ilyen módon? Nem fordulhat elő, hogy „bizonyos” $x \in [0, 10]$ számok esetleg nem írhatók fel (2.4) alakban és ráadásul ezekre az x-ekre f kisebb értéket vesz fel, mint a $\sqrt{3}$ pontban? Szerencsére a (2.4) összefüggés u-ra nézve valójában egy másodfokú egyenletre vezet, így gond nélkül megoldhatjuk:

$$u_1 = \frac{1}{6}\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right) \quad \text{és} \quad u_2 = \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x^2 + 9}\right).$$

Minthogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2 + 9} > \sqrt{x^2} = |x| = \max\{x, -x\}$ (egy x szám abszolút értéke x és $(-x)$ közül a nemnegatív, vagyis a nem kisebbik), ezért $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. Ez azt jelenti, hogy bármely x valós számhoz egyértelműen létezik u pozitív szám (és ezenfelül egy negatív is), amellyel x előáll (2.4) alakban, mégpedig

$$u = \frac{1}{6}\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right), \tag{2.7}$$

következésképpen a (2.4) helyettesítés egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést – más szóval bijekciót – ad meg a valós és a pozitív valós számok halmaza között (és emellett a valós és a negatív valós számok között is). A szemfülesebbek minderre természetesen a (2.3) és (2.4) összefüggések tükrében egyenletmegoldás nélkül is következtethetnek, az analízisben jártasak pedig akár elvégezhetik az $u \mapsto u - \frac{1}{4u}$ függvény teljes vizsgálatát.

Összefoglalva, a (2.5) azonosság érvényes minden $0 \leq x \leq 10$ esetén valamely $u > 0$ számmal, ezért csakugyan helyesen következtettünk a bal oldal minimumának helyére a jobb oldal pozitív számokon vett minimumhelyéből, így az f függvény a $[0, 10]$ intervallumon a legkisebb értékét az $x = \sqrt{3}$ pontban veszi fel. A gyalogosnak tehát a B-től $\sqrt{3}$ km-re lévő D pontban kell kimennie az országútra, hogy a legrövidebb idő alatt érjen a C pontba.

2.1. *Megjegyzés.* Ha (2.4) helyett $x = -3\left(u - \frac{1}{4u}\right)$, akkor $u > 0$ folytán

$$u = \frac{1}{6}\left(\sqrt{x^2 + 9} - x\right), \tag{2.8}$$

és ennek segítségével az előzőekhez hasonlóan vizsgálhatjuk az f függvényt. Sőt, a (2.1) azonosságban $v = \frac{1}{4u}$ helyett választhatunk más u, v párokat, a lényeg csupán, hogy a $4uv = 1$ összefüggés fennálljon – a különféle esetek mélyrehatóbb vizsgálatát az Olvasóra bízzuk.

A (2.7) vagy (2.8) helyettesítésekre rábukkanhatunk úgy is, ha a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség lebeg a szemünk előtt. A megfelelő alsó becslés érdekében ekkor olyan mennyiségeket célszerű felfedeznünk az f függvény (1.3) alakjában, amelyek szorzata állandó. És lám:

$$\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+9}-x\right) = \left(\sqrt{x^2+9}\right)^2 - x^2 = 9.$$

Mindezek a helyettesítések valójában már nagyon régen felbukkantak a matematikában, erről a következő szakaszban mesélünk.

3. Pihenő: négyzettáblázatok, Euler-helyettesítések

Ebben a részben egy csöppet még elidőzünk a (2.1) azonosság, valamint a (2.7), (2.8) helyettesítésekkel kapcsolatban felmerülő érdekességek és történeti háttér mentén. Mindez nem feltétlenül tartozik szorosan a megoldások folyamába, ezért első olvasásra nyugodtan a következő szakaszra lehet ugrani.

Szorzás és négyzetre emelés. Kezdjük először a (2.1) azonossággal, amelyet úgy is írhatunk, hogy

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = uv. \tag{3.1}$$

Ez azt fejezi ki, hogy két szám szorzatának kiszámítása megfelelő értelemben visszavezethető négyzetre emelésekre. Első ránézésre a formula összetettnek tűnik, ám nagy számok esetén hatékonyabb módszert adhat a szorzás közvetlen elvégzésénél. Ezt a 19. század elejétől kezdve többen felismerték és készítettek az egész számok négyzeteihez kapcsolódó táblázatokat. Jakob Philipp Kulik (1793–1863) osztrák matematikus 1851-ben például az 1-től 29999-ig terjedő egész számok négyzeteinek 1/4-szeresét foglalta táblázatba. Erről bővebben olvashatunk a [19] cikkben, ezenkívül a [21] weboldalon számos, az 1500-as évektől kezdődően készült, a kézi számolást segítő táblázatot tanulmányozhatunk. Természetesen a modern számítógépek elterjedésével ezek a táblázatok – ahogyan a középiskolai négyjegyű függvénytáblázat különböző számtáblázatai – fokozatosan jelentőségüket vesztették.

A szorzás négyzetre emelésre való visszavezetése nemcsak a konkrét számolásokat teheti könnyebbé, hanem elméleti okoskodásokban szintén hasznunkra válhat. Ha összeadás, kivonás, számmal való szorzás, valamint négyzetre emelés során megőrződik valamely tulajdonság – ezt sok esetben könnyű igazolni –, akkor ezt a tulajdonságot általában a szorzás ugyancsak megtartja. Ily módon is igazolható például, hogy két konvergens sorozat szorzatának határértéke a két sorozat határértékének szorzata, vagy bizonyítható a differenciálható függvények szorzatának deriválására vonatkozó Leibniz-formula, vagy éppen két Riemann-integrálható függvény szorzatának integrálhatósága – többek között Kalmár László szintén így szerette tanítani, lásd a [10] tankönyvének megfelelő részeit. Illusztrációképpen álljon itt a szorzat deriválási szabályának a (2.1) azonosságra támaszkodó szellemes bizonyítása: ha már tudjuk, hogy tetszőleges $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre és λ valós számra $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, valamint $(f^2)' = 2ff'$, akkor

$$\begin{aligned}(fg)' &= \left(\left(\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\frac{f-g}{2}\right)^2\right)' = \\ &= 2\cdot\frac{f+g}{2}\cdot\frac{f'+g'}{2} - 2\cdot\frac{f-g}{2}\cdot\frac{f'-g'}{2} = f'g + fg'.\end{aligned}$$

Megjemlítjük, hogy Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) német filozófus és matematikus – a differenciál- és integrálszámítás felfedezője Newton mellett – 1675. november 11-ei kéziratában még tévesen úgy vélte, hogy szorzat deriváltja a tényezők deriváltjainak szorzata, ám 10 napra rá már tudta a helyes szabályt (Leibnizről bővebben lásd az [5] könyv megfelelő fejezetét).

Euler és a helyettesítések. A (2.7) vagy (2.8) helyettesítésekre visszakanyarodva érdemes kiemelnünk, hogy ezeket Leonhard Euler (1707–1783) svájci matematikus – a matematikatörténet egyik legsokoldalúbb és legtermékenyebb géniusza – részletesen tárgyalta 1748-ban kiadott Introductio in analysin infinitorum (Bevezetés a végtelenek analízisébe) című kétkötetes művében, amelyben összefoglalta mindazt, ami szerinte az elenyészően kis mennyiségek analíziséhez szükséges. Az első kötet 3. fejezetében Euler többek között az $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ alakú négyzetgyökös kifejezések racionális törtfüggvénnyé (azaz két polinom hányadosává) való alakításához adott meg helyettesítéseket. Ha a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom mindenhol pozitív értékű, akkor szükségképpen $a > 0$ és $c = p(0) > 0$, és ekkor az

$$u = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x \quad \text{vagy} \quad u = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x} \tag{3.2}$$

új változókat vezette be Euler, amelyekre napjainkban Euler-féle helyettesítésekként szokás hivatkozni. Valójában mindkét képletben különbség helyett összeg is vehető, és így az elsőből lényegében megkapjuk a (2.7), (2.8) helyettesítéseket. Az Olvasó számára javasoljuk annak ellenőrzését, hogy ezekkel a helyettesítésekkel y az u változónak valóban racionális törtfüggvényévé válik (voltaképpen mindezt végigcsináltuk a 2. szakaszban y helyett az f függvénnyel). Azon szintén érdemes eltűnődni, hogy vajon milyen helyettesítést javasolt Euler abban az esetben, amikor az ax^2+bx+c polinomnak két valós gyöke van. Ezután ugyancsak megéri Euler eredeti művébe belepillantani, amely mai szemmel is kiválóan érthető (az összes művei különféle fordításokban olvashatók a [22] weboldalon). Módszerei és meglátásai közül – amint a fenti példa jól mutatja – számtalan mindörökre beépült a matematikai gondolkodásba (Eulerről bővebben olvashatunk az [5] könyvben).

A (3.2) helyettesítések talán ismerősek lehetnek az integrálszámításban jártasak számára, hiszen ott gyakran van szükség négyzetgyökös, a $\sqrt{x^2+1}$ kifejezést tartalmazó integrálok kiszámítására. Persze, az

$$u = \sqrt{x^2+1} - x, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{u - \frac{1}{u}}{2}$$

új változó bevezetésénél túlnyomórészt a sokkal kényelmesebb úgynevezett hiperbolikus függvényeket használjuk, vagyis

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t,$$

ahol sh a szinusz hiperbolikusz függvény. A $\sqrt{x^2-1}$ alakú kifejezés pedig

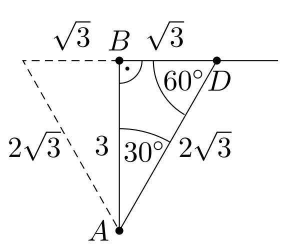
$$x = \frac{u + \frac{1}{u}}{2} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$$

helyettesítésekkel „racionalizálható”, ahol ch a koszinusz hiperbolikusz függvény, amelynek grafikonját láncgörbének szokás hívni, ugyanis ahhoz hasonló alakot vesz fel a két végén felfüggesztett lánc. (A szinusz és koszinusz hiperbolikusz függvényekről annyit máris tudunk, hogy $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, ami nem más, mint a (3.1) összefüggés egy újabb megnyilvánulási formája.) Végül pedig a $\sqrt{1-x^2}$ alakú kifejezés esetén a trigonometrikus $x = \sin t$ vagy $x = \cos t$ helyettesítés lehet a leginkább célravezető. Mindezekről (beleértve a láncgörbét) a [12] tankönyvben teljes részletességgel olvashatunk.

4. A gyalogosok és Huygens

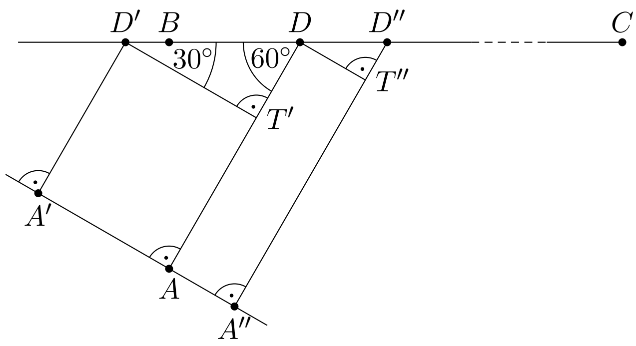
Térjünk most vissza a 2. szakasz eredményének elemzésére, ezáltal az időben legrövidebb út egy figyelemre méltó tulajdonságát fogjuk felfedni.

Fél szabályos háromszögek. Tanulmányozzuk először azt, hogy geometriailag milyen speciális helyzetű az időben legrövidebb út, amelyben a D pontnak $\sqrt{3}$ km távolságra kell lennie B-től. A Pitagorasz-tétel szerint ekkor $AD = 2\sqrt{3} = 2BD$, így az ADB háromszög éppen egy szabályos háromszög fele, vagyis $ADB\sphericalangle = 60°$, $BAD\sphericalangle = 30°$ (lásd a 3. ábrát). A gyalogosnak tehát az AB-vel 30°-os szöget bezáró AD szakaszon kell haladnia a BC országút felé.



3. ábra

Gyalogosok frontja. Tüzetesebben szemügyre véve az imént kirajzolódott speciális szögeket, egy különös összefüggés áll fenn. Képzeljük el, hogy egyszerre többen szeretnének a hómezőről a leghamarabb eljutni a C pontba, mégpedig a következőképpen. Az AD szakaszra az A pontban merőleges egyenesen az A (piciny) környezetében egymás mellé felsorakoztatjuk a gyalogosokat, akik ugyanabban az időpontban indulnak el az AD szakasszal párhuzamosan v sebességgel az országút felé (a 4. ábrán az A' és A'' pontokból induló gyalogosok pályája látható). Az országút elérésekor a gyalogosok $2v$ sebességgel a C pont felé haladnak tovább (egymás mellett, ha esetleg találkoznak). Azt állítjuk, hogy ekkor az összes gyalogos egyszerre érkezik a C pontba (pontosabban, az országútra C-ben merőleges egyenesre).



4. ábra

Vizsgáljuk például az A és A' pontból induló két gyalogost. A derékszögek miatt $AT'D'A'$ téglalap, ezért $AT' = A'D'$, így mikor az A' pontból induló gyalogos D'-be ér, az A-ból induló a T' pontba jut. Másrészt a $DD'T'$ háromszög egy szabályos háromszög fele, így $D'D = 2T'D$, emiatt a D'-ből $2v$ sebességgel továbbhaladó gyalogos ugyanakkor ér D-be, mint amikor a T'-ből v sebességgel D felé haladó másik gyalogos. Az A és A' pontból induló két gyalogos tehát egyszerre ér D-be, és innen már együtt, egymás mellett mennek tovább C felé. Hasonlóan látható, hogy az A és A'' pontokból induló gyalogosok D''-be egyszerre érnek, és mennek innen tovább.

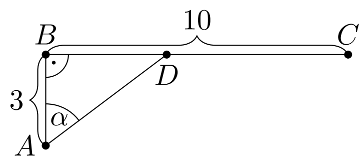
Fizikai nyelven az A-ból induló gyalogosra tekinthetünk úgy, mint a fényre, amelyről most a Pierre de Fermat (1601–1665) francia jogász és „műkedvelő” matematikustól származó elv szerint azt feltételezzük, hogy a legrövidebb idő alatt jut el a C pontba. Mint tudjuk, a fény hullámként is viselkedik, ezért egyetlen gyalogos helyett egy egész sereg gyalogosból álló, a haladás irányára merőleges front terjedésére gondolhatunk, amelyben minden gyalogos ugyanakkor érkezik a C pontba. E fizikai szemléletből kiindulva a 4. ábra segítségével visszafelé okoskodva könnyedén megkapjuk, hogy a gyalogosok pályájának az országúttal 60°-os szöget kell bezárnia. Mindez természetesen nem teljes értékű megoldás, de legalábbis a végeredmény egy igen érzékletes megsejtése.

4.1. *Történeti megjegyzés.* Az előbbi gondolatmenet általánosítása valójában már több évszázaddal ezelőtt megfogalmazódott a holland matematikus, fizikus és csillagász, Christiaan Huygens (1629–1695) fejében, aki egyébként különféle órák tervezésében is élen járt (az életéről az [5] könyvben olvashatunk). Az 1690-ben megjelent Traité de la lumière (Értekezés a fényről) című munkájában adta közre a fény hullámtermészetéről szóló elméletét, és – a 4. ábrához hasonló rajzon – megmutatta (lásd [9, 33. oldal]), hogy mindebből levezethető a fénytörés Willebrord van Roijen Snellius (1580–1626) holland csillagász és matematikus, valamint René Descartes (1596–1650) francia filozófus és természettudós által korábban már megfogalmazott törvénye, amely szerint a beesési szög szinuszának és a törési szög szinuszának hányadosa megegyezik az egyes közegekben mért terjedési sebességek hányadosával.

5. Megoldások potyognak az égből

Mielőtt a következő nevezetes egyenlőtlenségre térnénk rá, ebben a részben két további megoldást mutatunk, amelyekben felhasználjuk, hogy már megsejtettük a minimumhelyet. Az ilyesmi nem ritka a matematikában: egy fizikai érvelés vagy egy mélyebb elmélet (például differenciálszámítás) segít megsejteni a végeredményt, majd ezáltal lelünk más megoldási utakra.

Egy kis trigonometria. Az időben legrövidebb út igen speciális helyzete arra ösztönözhet, hogy megnézzük, miként fest a teljes út megtételéhez szükséges idő, ha azt például $\alpha = BAD\sphericalangle$ függvényében írjuk fel (lásd 5. ábra). Ekkor a BAD háromszögben $\cos\alpha = AB/AD$ és $\operatorname{tg}\alpha = BD/AB$, így



5. ábra

$$\frac{AD}{v} + \frac{DC}{2v} = \frac{AD}{v} + \frac{BC - BD}{2v} = \frac{AB}{2v}\left(\frac{2}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) + \frac{BC}{2v}, \tag{5.1}$$

ahol $AB = 3$ és $BC = 10$ adottak. A jobb oldalon a zárójelben lévő kifejezés minimumának megkeresése most sem tűnik magától értetődőnek, ám egyéb ötlet híján a differenciálszámítás elsöprő ereje bizonyára megteszi a dolgát. Ha viszont valahonnan – például az előző megoldásokból – már megsejtettük az $\alpha = 30°$ minimumhelyet, akkor elegendő a

$$\frac{2}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \geq \frac{2}{\cos 30°} - \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3}$$

egyenlőtlenséget igazolni $0 \leq \alpha \leq BAC\sphericalangle$ esetén, ami $\cos\alpha > 0$ miatt egyenértékű azzal, hogy

$$1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Mivel $\cos 30° = \sqrt{3}/2$ és $\sin 30° = 1/2$, ezért az iménti egyenlőtlenség a

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

addíciós formula felhasználásával az

$$1 \geq \cos(\alpha - 30°)$$

nyilvánvaló alakot ölti, amelyről az egyenlőség feltétele, $\alpha = 30°$ is azonnal leolvasható. Ez megfelel a feladat kívánalmainak, hiszen ekkor $AB = 3$ és $BC = 10$ miatt $BD = \sqrt{3} < BC = 10$. Mindez a szélsőérték-feladatunknak egy újabb, trigonometrikus megoldási módja.

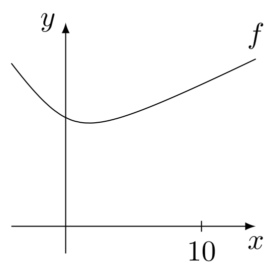
Vegyük észre, hogy az előbbi érvelésnek valójában az is folyománya, hogy az (5.1) kifejezés minimumhelye a $0 \leq \alpha \leq BAC\sphericalangle$ szögtartományon $\alpha = 30°$ minden olyan esetben, amikor $BAC\sphericalangle \geq 30°$ (az AB és BC szakaszok konkrét hosszától függetlenül). Természetesen mindez a 2. szakaszbeli érvelésből szintén következik, ugyanis az egységek átskálázásával feltehető, hogy $AB = 3$, így az (1.2) képlet csupán annyiban módosul, hogy

$$\frac{AD}{v} + \frac{DC}{2v} = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2+9} + \frac{BC - x}{2}\right) = \frac{1}{v}f(x) + \frac{BC - 10}{2v},$$

ahol $0 \leq x \leq BC$. Szóról szóra megismételve a korábbi okoskodást a minimumhelyre $x = \sqrt{3}$ adódik, feltéve, hogy $BC \geq \sqrt{3}$.

Felmerül a kérdés, hogy vajon $BC < \sqrt{3}$ esetén a BC szakasz mely pontja szolgáltatja az időben legrövidebb utat? Ebben az esetben $BD = \sqrt{3}$ már nem jöhet szóba, hiszen D a BC szakaszon kívülre esne. Ekkor például az f függvény monotonitási tulajdonságai lehetnek segítségünkre.

Monotonitás elemien. Valamely ismert matematikai program segítségével kirajzolva az f függvény grafikonját (6. ábra) rögtön megsejthetjük, hogy a minimumhelytől balra f szigorúan monoton csökkenő, jobbra pedig szigorúan monoton növő. (Vigyázzunk, hogy egy függvény egy minimumhelytől balra és jobbra is végtelen sokszor fel-le ingadozhat – oszcillálhat –, tehát általában nem feltétlenül kell monotonnak lennie!) Ebből következően, ha $BC < \sqrt{3}$, akkor az időben legrövidebb út maga a BC szakasz. A monotonitási tulajdonságokat differenciálszámítás segítségével természetesen könnyedén igazolhatjuk (az áprilisi KöMaL negyedik megoldásának mintájára), de elemien sem nehéz belátni, nézzük is meg. Legyen például $x_1 < x_2 \leq \sqrt{3}$, ekkor $f(x_1) > f(x_2)$ azt jelenti, hogy



6. ábra

$$\sqrt{x_1^2+9} + \frac{10 - x_1}{2} > \sqrt{x_2^2+9} + \frac{10 - x_2}{2},$$

átrendezve pedig

$$x_2 - x_1 > 2\left(\sqrt{x_2^2+9} - \sqrt{x_1^2+9}\right).$$

Mindkét oldalt a pozitív $\sqrt{x_2^2+9} + \sqrt{x_1^2+9}$ kifejezéssel szorozva, valamint az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ azonosságot felhasználva

$$(x_2 - x_1)\left(\sqrt{x_2^2+9} + \sqrt{x_1^2+9}\right) > 2\left((x_2^2+9) - (x_1^2+9)\right)$$

adódik, ahol a jobb oldal $2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ szorzat alakba írható át. Mivel $x_2 > x_1$, így az $(x_2 - x_1)$ pozitív tényezővel való ekvivalens leosztás után a

$$\sqrt{x_2^2+9} + \sqrt{x_1^2+9} > 2(x_2 + x_1),$$

a bizonyítandó $f(x_1) > f(x_2)$ összefüggéssel egyenértékű egyenlőtlenséghez jutunk. Ez viszont $x_2 \le \sqrt{3}$ és $x_1 < \sqrt{3}$ miatt teljesül, hiszen ekkor

$$\sqrt{x_2^2+9} + \sqrt{x_1^2+9} > 2\sqrt{12} = 2\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) > 2(x_2 + x_1).$$

Ezzel differenciálszámítás nélkül beláttuk f szigorú monoton csökkenését $x \le \sqrt{3}$ esetén; az $x \ge \sqrt{3}$ esetén való szigorú növekedés hasonlóan igazolható (és a fentiek mintájára érdemes megpróbálkozni az (5.1) függvény monotonitási szakaszainak vizsgálatával). Ez a hómezős feladatnak ismét egy megoldása.

6. Cauchy, Bunyakovszkij és Schwarz

Ebben a részben az (1.3) hozzárendeléssel értelmezett f függvényben szereplő négyzetgyök kiküszöbölésének egy újabb módját mutatjuk be, amelynek ötlete a [6] cikkből származik. Fő eszközünk a következő csinos algebrai egyenlőtlenség.

6.1. Állítás (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)**.** *Tetszőleges a, b, c, d valós számokra*

$$|ac + bd| \le \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}. \tag{6.1}$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $ad = bc$.

6.2. *Megjegyzés.* Bármely x valós számra $x \le |x|$ (és egyenlőség csakis $x \ge 0$ esetén van), ezért a (6.1) egyenlőtlenség igaz marad a bal oldalon szereplő abszolút érték elhagyásával. Ekkor az egyenlőség feltétele szigorúbb, $ad = bc$ mellett $ac + bd \ge 0$ is szükséges (amit sokkal elegánsabban meg lehet fogalmazni, erről nemsokára szót ejtünk a bizonyítást követő 6.5. Észrevételben).

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, elég tehát igazolni, hogy

$$(ac+bd)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Innen a műveletek elvégzése után

$$a^2c^2+2acbd+b^2d^2 \le a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

adódik, ami rendezve a

$$0 \le a^2d^2-2acbd+b^2c^2$$

alakot ölti, azaz

$$0 \le (ad-bc)^2.$$

Ez nyilvánvalóan teljesül, az egyenlőség feltétele, $ad = bc$ pedig világosan leolvasható. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, sőt minden lépésben az egyenlőség esete megőrződött, ezért az eredeti egyenlőtlenség is igaz és abban ugyanakkor áll fenn egyenlőség. □

6.3. *Megjegyzés.* Az egyenlőtlenség egy másik hagyományos bizonyítása, hogy felírjuk a nemnegatív és $a^2+b^2 \neq 0$ esetén másodfokú

$$(ax-c)^2+(bx-d)^2 = \left(a^2+b^2\right)x^2-2(ac+bd)x+c^2+d^2$$

kifejezés diszkriminánsát, amely szükségképpen nempozitív. Ezt az Olvasóra bízzuk, az egyenlőség esetének vizsgálatával együtt.

6.4. *Történeti megjegyzés.* A (6.1) egyenlőtlenség (abszolút érték nélküli változatának) valós szám n-esekre vonatkozó általánosítása a következő:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

Ezt Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) francia matematikus – a 6.3. Megjegyzésben vázolt ötletet követve – igazolta 1821-ben a híres École Polytechniqe műszaki egyetemen tartott analízis kurzusához írt könyvében. A mű a modern analízis kialakulásának fontos mérföldköve, amelyben Cauchy számos mai fogalom, köztük például a határérték, folytonosság alapjait fektette le (Cauchy összegyűjtött munkái 27 kötetet tesznek ki, amelyek a [23] weboldalon elektronikus formában megtalálhatók több más hasonlóan kiemelkedő matematikus összes műveivel együtt). Később, 1859-ben Viktor Jakovlevics Bunyakovszkij (1804–1889) orosz matematikus az egyenlőtlenségnek integrálható függvényekre vonatkozó változatát írta fel:

$$\left(\int_a^b g(x)h(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b g^2(x)\,dx\cdot\int_a^b h^2(x)\,dx.$$

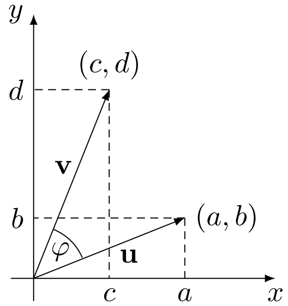
Bunyakovszkij cikke kevéssé vált ismertté az akkori Nyugat-Európában, így nem tudván az eredményről Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) német matematikus 1885-ben hasonló egyenlőtlenséget igazolt felszíni integrálokkal kapcsolatos munkájában. Ezek alapján szokás a (6.1) egyenlőtlenséget és általánosításait Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség néven emlegetni – ám nyelvterületenként és matematikai iskolánként is roppant változatos, hogy a három névből álló halmaz nemüres részhalmazai közül melyikkel illetik az egyenlőtlenséget (a nevek sorrendjéről nem is beszélve).

A hómezős feladatra való alkalmazás előtt célszerű még egy észrevételt tennünk az egyenlőtlenség szemléletes jelentéséről. Akiket a megoldás jobban izgat, azok első olvasáskor továbbugorhatnak.

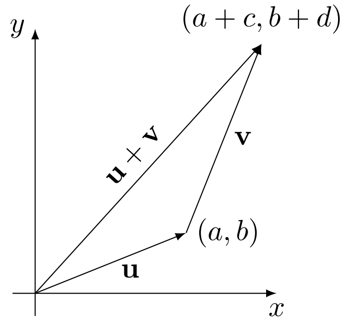
6.5. Észrevétel. A ránézésre algebrainak tűnő (6.1) egyenlőtlenségnek valójában geometriai jelentés tulajdonítható. Vegyük észre ugyanis (lásd 7. ábra), hogy $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{c^2+d^2}$ rendre az $\mathbf{u} = (a,b)$ és $\mathbf{v} = (c,d)$ síkbeli vektorok hossza (abszolút értéke), az $ac + bd$ kifejezés pedig a két vektor skaláris szorzata derékszögű koordinátarendszerbeli koordináták segítségével felírva (vektorok skaláris szorzatáról és geometriai alkalmazásairól bővebben lásd Reiman István (1927–2012) – a magyar matematikai tehetséggondozás legendás alakja, a diákolimpiai szakkör évtizedeken keresztüli vezetője – kitűnő [18] könyvét). Ismert, hogy két vektor skaláris szorzata a hosszaik és a hajlásszögük koszinuszának szorzata. Ha most $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ jelöli $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ skaláris szorzatát, akkor a (6.1) egyenlőtlenség így írható:

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot |\cos\varphi| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|\,.$$

(Vigyázzunk, itt kétféle abszolút érték is szerepel, számoké és vektoroké egyaránt.) Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $|\cos\varphi| = 1$, vagyis az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok egyállásúak – ellenőrizzük le, hogy ez egyenértékű a korábban kapott $ad = bc$ feltétellel. Az is világosan látszik, hogy a bal oldali abszolút érték nélküli $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ egyenlőség feltétele $\cos\varphi = 1$, tehát $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ azonos irányúak. Ebben a formában sokkal szemléletesebb (és könnyebben



7. ábra



8. ábra

megjegyezhető) a (6.1) egyenlőtlenség, vigyázzunk azonban, hogy bár a bizonyítás ránézésre pofon egyszerű, de el van benne rejtve a skaláris szorzat koordinátákkal felírt alakja.

Figyelemre méltó még az előbbieken kívül, hogy a (6.1) egyenlőtlenségnek következménye a síkvektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|\,.$$

Ez persze geometriailag világos, hiszen az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ vektorok alkotta háromszög bármely két oldalhosszának összege legalább akkora, mint a harmadik oldal hossza (lásd 8. ábra). A néha becsapós szemléletet viszont könnyedén kikerülhetjük, ugyanis koordinátákkal kifejezve arról van szó, hogy

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}, \tag{6.2}$$

ami – négyzetre emeléssel és rendezéssel láthatóan – a (6.1) egyenlőtlenség abszolút érték nélküli változatával ekvivalens.

A hómezős feladat megoldása. Kanyarodjunk most vissza az (1.3) függvény minimumának megkereséséhez. A $\sqrt{x^2+9}$ kifejezés éppen az $(x,3)$ vektor hossza, ami azt sugallhatja számunkra, hogy a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséggel próbálkozzunk. Az alkalmazásához azonban szükségünk lenne még egy vektorra, ám szerencsére ott van, csak „elrejtőzött”:

$$\sqrt{x^2+9} = \sqrt{x^2+9}\cdot 1 = \sqrt{x^2+9}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}. \tag{6.3}$$

(Amennyiben nem szeretnénk trigonometrikus függvényekkel dolgozni, akkor $(\cos\beta,\sin\beta)$ helyett gondoljunk egyszerűen egy (v_1,v_2) egység hosszú vektorra, azaz $v_1^2+v_2^2=1$.) A β szög számunkra megfelelő értékét egyelőre nem tudjuk, de tüstént ki fog derülni. Alkalmazzuk most a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség abszolút érték nélküli változatát (6.3) alapján:

$$\sqrt{x^2+9} = \sqrt{x^2+9}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta} \geq x\cos\beta + 3\sin\beta. \tag{6.4}$$

Ezzel az f függvény egy alsó becslését nyerjük:

$$f(x) \geq x\cos\beta + 3\sin\beta + \frac{10-x}{2} = x\left(\cos\beta - \frac{1}{2}\right) + 3\sin\beta + 5.$$

Immár jól látszik, hogy $\cos\beta = 1/2$ esetén f-nek x-től független alsó becslése adódik. Legyen tehát $\beta = 60^\circ$, ekkor $\cos\beta = 1/2$, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$ miatt

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} + \frac{10-x}{2} \geq 3\sin\beta + 5 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 5.$$

A 6.2. Megjegyzés figyelembevételével egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha $x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\cdot\frac{1}{2}$, azaz $x = \sqrt{3}$ (a 6.5. Észrevételben foglaltak szerint úgy is fogalmazhatunk, hogy az $(x, 3)$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ vektoroknak azonos állásúaknak kell lenniük). Mivel $0 < \sqrt{3} < 10$, ezzel a korábbi megoldásokhoz hasonlóan megkaptuk, hogy az f függvény minimumhelye a $[0, 10]$ intervallumon $x = \sqrt{3}$.

6.6. *Megjegyzés.* A kíváncsi Olvasó eltöprenghet azon, hogy az előbbi okoskodásban felbukkanó β szög és maga a (6.4) egyenlőtlenség az 1. ábrán vajon hogyan jeleníthető meg – ehhez érdemes használni azt, hogy egy vektornak egy adott egységvektorral képzett skaláris szorzata a vektornak az egységvektor irányára vetett előjeles vetülete (lásd [18]).

Az [1] könyvecskében a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség mellett további nevezetes egyenlőtlenségekhez kapcsolódó feladatok közül válogathatunk, ezenkívül a [20] angol nyelvű könyv igazi csemege azok számára, akik az egyenlőtlenségek művészetében szeretnének kalandozni.

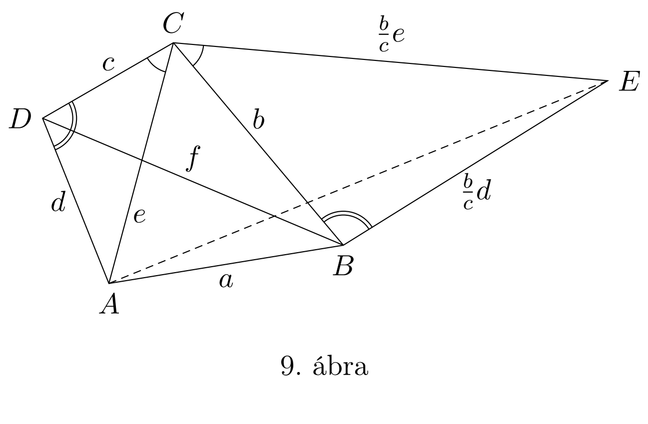
7. Egy geometriai nagyágyú

Az eddigi temérdek analízis és algebra után következzen most egy geometriai okoskodás, amelynek ötlete a [15] cikkből származik és egy – a versenyfeladatokon edződöttek számára vélhetően jól ismert – nevezetes geometriai egyenlőtlenségre támaszkodik. (Az alábbiakban kissé pongyolán sokszög oldalának mérőszáma helyett egyszerűen az oldalról fogunk beszélni.)

7.1. Tétel (Ptolemaiosz-egyenlőtlenség)**.** *A síkon bármely konvex négyszögben a szemközti oldalak szorzatának összege legalább akkora, mint az átlók szorzata. Egyenlőség csakis húrnégyszögben teljesül.*

Bizonyítás. Tekintsük a 9. ábrán látható $ABCD$ konvex négyszöget, amelynek oldalai $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, az átlói pedig $AC = e$, $BD = f$. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy

$$ac + bd \geq ef.$$



9. ábra

Emeljünk a BC oldalra a CDA háromszöggel hasonló CBE háromszöget úgy, hogy $ACD\sphericalangle = ECB\sphericalangle$ és $CDA\sphericalangle = CBE\sphericalangle$ (más szóval alkalmazzunk C középpontú forgatva nyújtást az ACD háromszögre úgy, hogy CD képe CB legyen). A hasonlóság aránya $CB/CD = b/c$, ezért $CE = \frac{b}{c}e$ és $BE = \frac{b}{c}d$. Vegyük észre, hogy ekkor a CAE és CDB háromszögek szintén hasonlók, mert $BCD\sphericalangle = ECA\sphericalangle$ és $CE/CB = CA/CD = e/c$. Következésképpen $AE/DB = e/c$, vagyis $AE = \frac{e}{c}f$. Mivel az ABE háromszögben az AB és BE oldalak összege legalább akkora, mint AE, így

$$a + \frac{b}{c}d \geq \frac{e}{c}f,$$

amiből c-vel való beszorzás után éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az ABE háromszög elfajuló, azaz $ABC\sphericalangle + CBE\sphericalangle = 180°$. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszögben a B és D csúcsoknál lévő belső szögek összege 180°, tehát $ABCD$ húrnégyszög. □

7.2. *Történeti megjegyzés.* Klaudiosz Ptolemaiosz a Kr. e. II. századi alexandriában élt matematikus, csillagász, földrajztudós, a geocentrikus – a Földet a világegyetem középpontjának tekintő – világkép megalkotója. Az Almageszt című műve az ókori csillagászat legfontosabb tudományos forrása, amely a benne található trigonometriai számítások szempontjából is kiemelkedő jelentőségű. Ebben igazolta Ptolemaiosz többek között azt, hogy húrnégyszögben az átlók szorzata a szemközti oldalak szorzatainak összege.

7.3. *Megjegyzés.* E kicsit talán hosszabb lélegzetvételűre nyúló megjegyzésben a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség bizonyítása kapcsán hívjuk fel a figyelmet néhány észrevételre, általánosításra. Első olvasáskor nyugodtan a hómezős feladat megoldásához lehet ugrani.

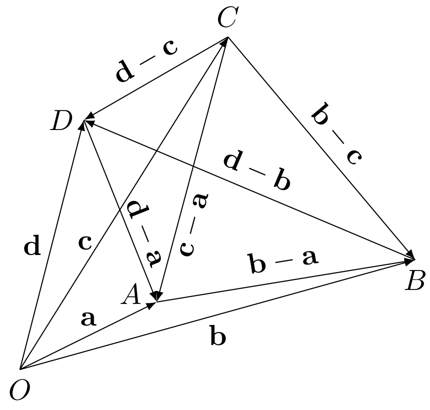
Az előbbi bizonyítás apró finomításával nem nehéz igazolni (lásd [8, 12.14. feladat]), hogy tetszőleges A, B, C, D síkbeli pontnégyesre igaz

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a négy pont egy körön (vagy egyenesen) helyezkedik el és azon az AC pontpár elválasztja a BD pontpárt. Sőt, megmutatható, hogy bármely nem egy síkban fekvő pontnégyes esetén szigorú egyenlőtlenség áll fenn (erről lásd a [18] könyv 5.8. szakaszát).

A Ptolemaiosz-egyenlőtlenségnek a fentitől különböző, a Simson-egyenes bizonyos tulajdonságára épülő bizonyítása olvasható a [3] könyvben. Számos feladat között böngészhetünk a [11] írásban, ahol az egyenlőtlenség egy általánosítása – a Casey-tétel, amelyben a csúcsok szerepét érintő körök, az oldalakét pedig érintők veszik át – ugyancsak terítékre kerül.

Végül nem tudunk ellenállni a kísértésnek, hogy röviden szót ejtsünk a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség komplex számok segítségével történő igen elegáns igazolásáról. Tekintsük az A, B, C, D pontoknak megfelelő $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ komplex számokat a komplex számsíkon (lásd 10. ábra), azaz például $\mathbf{a} = a_1 + a_2\mathrm{i}$,



10. ábra

ahol a_1 a valós, a_2 pedig a képzetes rész. A komplex számok közötti szorzás a valós számok szorzásához hasonlóan viselkedik $\mathrm{i}^2 = -1$ figyelembevételével:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 + a_2\mathrm{i})(b_1 + b_2\mathrm{i}) = a_1b_1 - a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}.$$

Induljunk ki most a könnyen ellenőrizhető

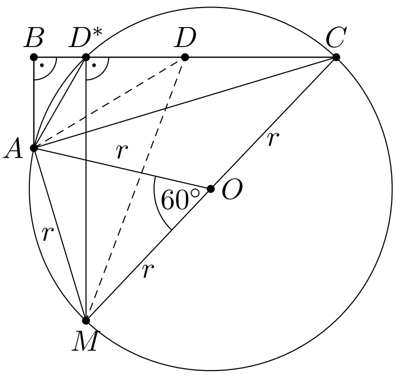
$$(7.1) \qquad (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{d}) = (\mathbf{a} - \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

azonosságból. Vegyük észre (ismét lásd a 10. ábrát), hogy $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{d}$ az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ átlóvektorok, továbbá $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, illetve $\mathbf{d} - \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ rendre a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{BC}$, illetve $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AB}$ szemközti oldalvektorok. Ekkor (7.1) mindkét oldalán abszolút értékét véve, majd alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{c}| + |\mathbf{d} - \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{a}|,$$

ami éppen a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség. Az egyenlőség esetét egyáltalán nem nyilvánvaló kiolvasni a bizonyításból, ebben az úgynevezett kettősviszony segíthet, bővebben lásd például [17, 31. feladat], [18, 12.5. szakasz], ahol a komplex számok egyéb geometriai alkalmazásáról is olvashatunk.

A hómezős feladat megoldása. Ennyi előkészület után térjünk vissza a hómezős feladat megoldására, most a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség segítségével. Tekintsük a 11. ábrát, ahol legyen D^* a BC szakasz azon pontja, amelyre $BAD^*\sphericalangle = 30°$ (a korábbiak fényében tudjuk, hogy ez fogja adni a minimumot). Rajzoljuk meg az A, D^* és C pontokon átmenő kört, amelynek középpontja legyen O, sugara pedig r, és a D^* pontban a BC szakaszra állított merőleges egyenes messe a kört az M pontban. A Thalész-tétel miatt ekkor MC átmérő a körben, tehát $MC = 2r$. Másrészt a kerületi és középponti szögek tétele miatt $MOA\sphericalangle = 2MD^*A\sphericalangle = 2BAD^*\sphericalangle = 60°$ ($BAD^*\sphericalangle$



11. ábra

és $MD^*A\sphericalangle$ fordított állásúak), vagyis az MOA egyenlő szárú háromszög szabályos, így $AM = r$. Ha D a BC szakasz tetszőleges pontja, akkor az $AMCD$ konvex négyszögben a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség szerint

$$AD \cdot MC + AM \cdot DC \geq AC \cdot MD,$$

azaz

$$2r \cdot AD + r \cdot DC \geq AC \cdot MD.$$

Minthogy MD^* átfogó az MDD^* (esetleg elfajuló) derékszögű háromszögben, ezért $MD \geq MD^*$, így

$$AD + \frac{DC}{2} \geq \frac{AC \cdot MD^*}{2r},$$

ahol a jobb oldal a D pont választásától független állandó. Egyenlőség pontosan akkor van, ha $ADMC$ húrnégyszög, vagyis $D = D^*$. Ezzel sokadjára beláttuk, hogy az (1.2) kifejezés minimumhelyét a D^* pont adja, tehát a gyalogosnak itt kell kimennie az országútra.

Akiknek elnyerte tetszését a húrnégyszögek világa, azok a [4] könyvben indulhatnak a meghódításukra, ezenkívül pedig ajánljuk a szakaszban már korábban említett [3, 11, 17, 18] olvasnivalókat.

8. Besegít a mechanika

Zárásként a hómezős feladatot mechanikai köntösbe bújtatjuk, amelynek ötlete Pólya György – világhírű matematikus, a matematikai gondolkodás és problémamegoldás tudományának kiemelkedő tanár- és tudósegyénisége – [16] könyvének 9. fejezetében is szerepel, ahol számos egyéb szélsőérték-feladat fizikai szemléletű megoldása olvasható élvezetes stílusban.

Képzeljük el, hogy a 12. ábrán látható módon a vízszintes helyzetű BC (tökéletesen merev) rúdra felfűzve szabadon (súrlódásmentesen) csúszhat a

D gyűrű. A gyűrűhöz egy $DAP = \ell_1$ és egy $DCQ = \ell_2$ (elegendő) hosszúságú (nyújthatatlan) kötelet kötünk, amelyeket rendre az A és B pontokban rögzített csigákon átvetünk, majd ezután a P, illetve Q végükre egy p, illetve q súlyú testet helyezünk, ahol a súlyok arányát később választjuk meg. (A szokásos módon a gyűrűt, a csigákat és a súlyokat is pontszerűnek tekintjük, a kötél súlyát és a súrlódást pedig elhanyagoljuk.) Magára hagyva a rendszert egy idő után beáll az egyensúlyi helyzetébe, amelyben a helyzeti energiája minimális. A BC rudat véve a viszonyítási szintnek a p súlyú test $(-BP)$ magasságban található, ezért a helyzeti energiája $(-BP \cdot p)$; ehhez hasonlóan a q súlyú test helyzeti energiája $(-CQ \cdot q)$. A rendszer helyzeti energiája tehát a $BP \cdot p + CQ \cdot q$ kifejezés ellentettje, amely akkor lesz a lehető legkisebb, ha $BP \cdot p + CQ \cdot q$ maximális. Minthogy $BP = BA + AP$ és $AP = \ell_1 - AD$, $CQ = \ell_2 - DC$, ezért

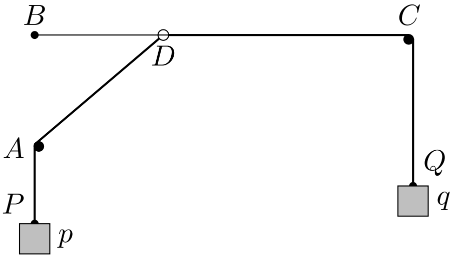
$$\begin{aligned} BP \cdot p + CQ \cdot q &= BA \cdot p + (\ell_1 - AD) \cdot p + (\ell_2 - DC) \cdot q = \\ &= (\ell_1 p + \ell_2 q + BA \cdot p) - (AD \cdot p + DC \cdot q). \end{aligned}$$

Itt az $\ell_1 p + \ell_2 q + BA \cdot p$ mennyiség állandó, így egyensúlyi helyzetben az $AD \cdot p + DC \cdot q$ kifejezés minimális. Ha most a súlyok arányát úgy választjuk meg, hogy $q = p/2$, akkor a

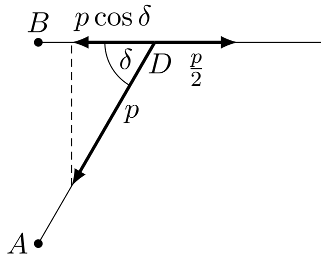
$$p \cdot \left(AD + \frac{DC}{2} \right)$$

kifejezés minimumhelye adja egyensúly esetén a D pont helyzetét. De ez (1.1) alapján éppen megegyezik a hómezős feladatbeli út megtételéhez szükséges idővel, ha $p = 1/v$. Így tehát a mechanikai problémabeli egyensúlyi helyzet megfelel a hómezős feladat időben legrövidebb útjának. Szerencsére a mechanikai rendszer egyensúlyi helyzetét nemcsak energiákkal, hanem a gyűrűre ható erők eredőjének segítségével szintén jellemezhetjük, ezáltal a minimumhely egy másik leírását nyerjük.

Tudjuk, hogy egyensúlyi helyzetben a gyűrűre ható erők kiegyenlítik egymást. Mivel a súlyok húzását a kötelek és a csigák változatlanul közvetítik, ezért a gyűrűre egy p és egy $p/2$ nagyságú erő hat a két kötél irányában, lásd



12. ábra



13. ábra

a 13. ábrát. A gyűrű nyugalomban van, így ezen két erő vízszintes összetevői semlegesítik egymást (függőlegesen pedig a rúd merevségéből származó erő ellensúlyozza a p nagyságú erő hatását). Ha $ADB\sphericalangle = \delta$, akkor a A csiga irányában ható erő vízszintes kompenense $p\cos\delta$ nagyságú. A B csiga irányában a vízszintes $p/2$ nagyságú erő hat, így szükségképpen

$$\frac{p}{2} = p\cos\delta,$$

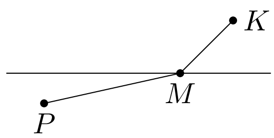
vagyis $\cos\delta = 1/2$, tehát $\delta = 60^\circ$. Ez azt jelenti, hogy egyensúlyi helyzetben $ADB\sphericalangle = 60^\circ$, és az előbb meggondoltak tükrében a hómezős feladatban szintén ez a D pont szolgáltatja az időben legrövidebb utat.

A fizika matematikai alkalmazásaira további meglepő példákat láthatunk a [13] könyvben, ahol a hómezős feladat optikai és mechanikai megközelítéséről is bővebben olvashatunk. Ajánljuk továbbá a [2] cikket, amely elektromos ellenállások hálózatait hívja segítségül különböző egyenlőtlenségek, köztük a számtani és hamonikus közép közötti egyenlőtlenség igazolásához.

9. Irány Kukutyin és Piripócs

A cikk elején beharangozott megoldások sora véget ért, de a lehetséges okoskodások tárháza alighanem kimeríthetetlen. Érdemes tovább keresgélni és a közöttük lévő kapcsolatokat feltérképezni, valamint megvizsgálni, mi a helyzet abban az esetben, ha a gyalogos sebessége c-szer ($c > 0$) akkora az országúton, mint a hómezőn (az országúton akár lassabban is mehet). Egy általánosítási lehetőség az érdeklődő és elszánt Olvasók számára a következő.

Feladat. Kukutyin és Piripócs egy egyenes autópálya két különböző oldalán helyezkedik el (lásd 14. ábra). Az autópálya egy M pontjából leágazásokat építenek a két városhoz. Az építési költség Kukutyin felé c-szer akkora, mint Piripócs felé (ahol $c > 0$). Hol legyen az M pont, hogy az útépítés összköltsége minimális legyen?



14. ábra

A $c = 1$ eset megoldása nyilvánvaló, mert ekkor a PK szakasz hosszban a legrövidebb, tehát a költsége minimális. Ez a feladat függvénytani álruhában a márciusi emelt szintű feladatsor 4. feladata volt (és például a 2009/2010-es tanévi Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen a kezdők I–II. kategória második fordulójában is szerepelt, a megoldásában a (6.2) egyenlőtlenség ugyancsak felbukkant, lásd a feladatsort és a megoldást a [24] weboldalon).

Próbáljunk meg a hómezős feladatnak a KöMaL áprilisi számában és e cikkben közölt megoldásai közül minél többet a fenti feladatra általánosítani. Ezek közül a differenciálszámítást használó okoskodás olvasható a [12] könyv 11.49. Példájában; a mechanikai érvelés a [16] könyv 9. fejezetében; a

Ptolemaiosz-tételre épülő megoldás a [15] cikkben; a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget alkalmazó pedig a [6] cikkben, ahol ezenfelül egy, a fény hullámtermészete által motivált, Huygenstől eredő geometriai megoldás is található. Izgalmas kalandozást kívánunk az ötletek rengetegében!

Köszönetnyilvánítás. A szerző köszönettel tartozik Kovács Balázsnak és Gnädig Péternek a kézirathoz fűzött értékes megjegyzéseikért.

Hivatkozások

[1] Ábrahám Gábor, *Nevezetes egyenlőtlenségek*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.

[2] Besenyei Ádám, A Milne-egyenlőtlenség és társai, avagy ellenállások álruhában I–II., *KöMaL*, 2015/9, 514–524. és 2016/1, 2–10., `http://abesenyei.web.elte.hu/publications/ellenallas.pdf`

[3] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat, Budapest, 1977.

[4] Gerőcs L., *A húrnégyszögek meghódítása*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2010.

[5] Sz. G. Gingyikin, *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, Harmadik kiadás, Typotex, Budapest, 2012.

[6] M. Golomb, Elementary Proofs for the Equivalence of Fermat's Principle and Snell's Law, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 5 (May, 1964), 541–543., `http://www.jstor.org/stable/2312599`

[7] Hódi Endre, *Szélsőérték-feladatok elemi megoldása*, 3. kiadás, Typotex, Budapest, 1998.

[8] Hraskó András, Surányi László (szerk.), *Geometria, 9–10. évfolyam*, Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 2013., `http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_ii.pdf`

[9] Ch. Huygens, *Traité de la lumière*, Chez Pierre van der Aa, Leiden, 1690., `https://archive.org/stream/traitdelalvmie00huyg`

[10] Kalmár László, *Bevezetés a matematikai analízisbe I–II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[11] Kubatov Antal, *Ptolemaios tétele, Casey-tétel, feladatok*, `http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok`

[12] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós Analízis I.*, Typotex, Budapest, 2012.

[13] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[14] Németh József, *Szélsőérték-problémák a mindennapi életben*, http://www.math.u-szeged.hu/∼nemethj/orosh13.pdf

[15] D. Pedoe, A Geometric Proof of the Equivalence of Fermat's Principle and Snell's Law, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 5 (May, 1964), 543–544., `http://www.jstor.org/stable/2312600`

[16] Pólya György, *Indukció és analógia (A matematikai gondolkodás művészete 1.)*, Gondolat, Budapest, 1988.

[17] Reiman István, Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, 3. kiadás, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[18] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999.

[19] D. Roegel, A reconstruction of Kulik's table of multiplication (1851), `http://locomat.loria.fr/kulik1851/kulik1851doc.pdf`

[20] J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class (An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities)*, Cambridge Univ. Press, NY, 2004.

[21] Loria Collection of Mathematical Tables, `http://locomat.loria.fr`

[22] Euler Archive, `http://eulerarchive.maa.org`

[23] Gallica-Math, `http://sites.mathdoc.fr/OEUVRES`

[24] `http://www.eszesen2010.hu`