A Milne-egyenlőtlenség és társai, avagy ellenállások álruhában

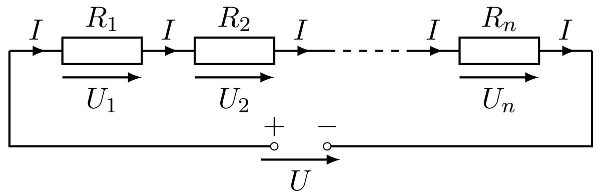
Besenyei Ádám
badam@cs.elte.hu

„A matematika a fizika része. A fizika kísérleti tudomány, a természettudomány része. A matematika a fizikának az a része, amelyben a kísérletek olcsók.” E mondatokkal kezdte a matematika tanításáról szóló előadását (lásd [3]) a 20. század egyik zseniális matematikusa, Vlagyimir Igorevics Arnold (1937–2010), aki a fizikai intuíciót a matematikai gondolkodás nélkülözhetetlen elemének tekintette (egyedi látásmódjáról bárki képet kaphat az idézett előadásából, illetve a magyarul középiskolai szakköri füzetként megjelent [2] könyvecskéjéből). Bár Arnold iménti kijelentése kissé merésznek tűnik, annyi mindenesetre bizonyos, hogy számos, tisztán matematikainak látszó eredmény mögött valójában a józan ész számára teljesen világos és természetes fizikai elvek bújnak meg. Ezek a rejtett gondolatok gyakran roppant váratlan helyeken bukkannak fel – a [8] könyv például egy egész sereg meglepő összefüggésre világít rá –, és gyönyörű megnyilvánulásai a két tudományterület egymáshoz való szoros kötődésének.

Jelen írásunk célja is éppen az, hogy egy szép és talán kevéssé ismert példáját mutassuk annak, ahogyan egyszerű fizikai meggondolások matematikai álruhát öltenek. Mindössze ellenállásokat kell megfelelő módon összekapcsolni, és rögtön nevezetes egyenlőtlenségekhez jutunk, mint például a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség, a Milne-egyenlőtlenség, amely egy KöMaL feladat megoldásában is szerephez jutott, valamint a Minkowski-egyenlőtlenség egy speciális esete. Cikkünkben az említett egyenlőtlenségeket először ellenállás-hálózatokbeli fizikai megfontolások segítségével „bizonyítjuk”, majd matematikailag is igazoljuk, közben pedig a történeti hátterükről szintén szót ejtünk. Mindvégig csupán elemi eszközökre támaszkodunk, nagyrészt matematikára, az elején egy kis fizikával fűszerezve. Néhány eredményt feladat formájában fogalmazunk meg és tűzünk ki, ezzel elősegítve a témában való elmélyülést. Kezdődjön tehát a kaland!

1. Bemelegítés: dióhéjban az eredő ellenállásról

Mielőtt rátérnénk az egyenlőtlenségekre, elevenítsük fel, hogy mit tanulunk a fizikaórán ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása esetén az eredő



1. ábra. Ellenállások soros kapcsolása

ellenállásról. Aki úgy érzi, hogy mindenre emlékszik, vagy még frissek az ismeretei, az (első olvasáskor) nyugodtan ugorjon a következő szakaszra.

Ha egy U feszültségű áramforrásra az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokat sorosan kapcsoljuk az 1. ábrán látható módon, akkor mindegyik ellenálláson ugyanakkora I áram folyik keresztül, az áramforrás feszültsége azonban megoszlik az ellenállásokon, méghozzá Kirchhoff huroktörvénye alapján

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n, \tag{1.1}$$

ahol U_i az i-edik ellenállásra eső feszültség. Mivel Ohm törvénye szerint $U_i = R_i \cdot I$ és $U = R_e \cdot I$, ahol R_e jelöli az eredő ellenállást, amellyel az n darab ellenállás helyettesíthető, ezért az (1.1) összefüggés alapján

$$R_e I = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I.$$

Következésképpen

$$R_e = R_1 + R_2 + \cdots + R_n, \tag{1.2}$$

tehát soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások összege.

Ezzel szemben, ha az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (nem nulla) ellenállásokat a 2. ábrának megfelelően párhuzamosan kapcsoljuk az áramforrásra, akkor az egyes ellenállásokra ugyanakkora U feszültség esik, viszont különböző nagyságú $I_1, I_2, \ldots, I_n$ áramok folynak rajtuk keresztül, amelyek összege Kirchhoff csomóponti törvénye szerint éppen az áramforráson áthaladó áram nagysága:

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

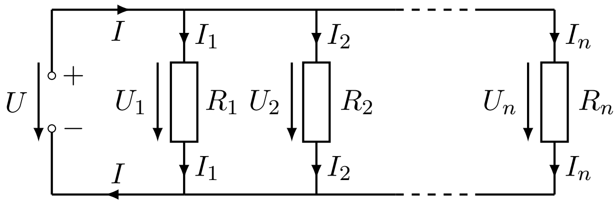
Ekkor ismét Ohm törvényét alkalmazva

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_n},$$

így

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n},$$

vagyis párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás reciproka az egyes ellenállások reciprokainak összegével egyezik meg. Az eredő ellenállás tehát az



2. ábra. Ellenállások párhuzamos kapcsolása

egyes ellenállások reciprokösszegének reciproka, vagyis az $R_1, \ldots, R_n$ pozitív számok harmonikus közepének n-edrésze:

$$R_{\mathrm{e}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}. \tag{1.3}$$

(A későbbiekben – többek között tipográfiai és esztétikai okokból kifolyólag – néhol reciprok helyett (-1)-edik hatványt fogunk írni.)

1.1. *Történeti megjegyzés.* Érdekességképpen megemlítjük, hogy Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) az egykori poroszországi Königsberg (mai nevén Kalinyingrád) városában született, majd tanult, és 1845-ben egyetemistaként fogalmazta meg a hurok- és csomóponti törvényt. A város hídjait bejáró sétáról szól a középiskolások körében is bizonyára jól ismert königsbergi hidak problémája, amelyet a svájci Leonhard Euler (1707–1783) oldott meg 1736-ban – innen ered az Euler-séta elnevezés is –, és indította el ezzel a gráfelmélet fejlődését.

2. Rayleigh monotonitási törvénye

Az előző szakaszban átismételt összefüggések mellett az eredő ellenállással kapcsolatban szükségünk lesz még egy észrevételre, amelyet gyakran Rayleigh monotonitási elveként vagy törvényeként emlegetnek – a változatosság kedvéért mi is mindkét megnevezést használni fogjuk.

2.1. Elv (Rayleigh monotonitási elve/törvénye)**.** Ha ellenállások egy hálózatában valamelyik ellenállást növeljük, akkor a hálózat eredő ellenállása nem csökkenhet; valamely ellenállást csökkentve pedig az eredő ellenállás nem növekedhet.

2.2. *Történeti megjegyzés.* Az elvet a később Nobel-díjjal kitüntetett angol fizikus, John William Strutt (1842–1919), ismertebb nevén Lord Rayleigh 1871-ben hangtani vizsgálódásai során használta. Ennek segítségével adott alsó és felső becslést különböző elektromos vezetők ellenállására. Rayleigh módszerére a kiváló skót fizikus, James Clerk Maxwell (1831–1879) a Tanulmány az elektromosságról és mágnességről című 1873-ban megjelent – az azóta a nevét viselő Maxwell-egyenletek első alakját tartalmazó – híres művében is hivatkozik. Mindketten úgy fogalmazták az elvet, hogy ha egy vezető valamely részének ellenállását megváltoztatjuk, és a többi részt változatlanul hagyjuk, akkor az egész vezető ellenállása nő, ha a rész ellenállását növeltük, és csökken, ha csökkentettük (lásd Maxwell [9] művének 353–354. oldalait).

Rayleigh törvénye valószínűleg sokak számára nem igényel magyarázatot, szemléletesen teljesen világos, vagy legalábbis hihető. Az mindenesetre biztos, hogy az 1. és 2. ábrák hálózatai esetében érvényes, hiszen könnyen látható, hogy az eredő ellenállást megadó (1.2) és (1.3) kifejezések bármely R_i ellenállás növelésével növekednek.

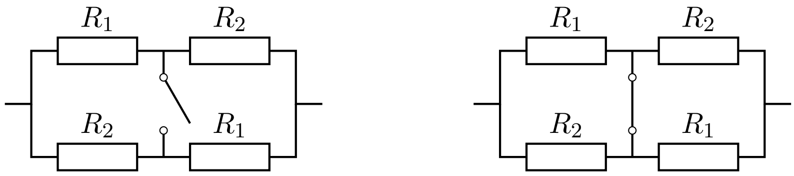
Valószínűleg sokkal látványosabb Rayleigh törvénye, ha áramkörök helyett például vízvezeték-hálózatra gondolunk, amelyben egy szakasz leszűkítésével a rendszerben adott időegység alatt átfolyó víz mennyisége nem növekedhet. Ennél még meggyőzőbb lehet, ha eszünkbe jutnak a különböző úthálózatokon kialakuló torlódások, amelyek egy-egy útszakasz leszűkítése vagy lezárása következtében alakulnak ki. Aki az előbbi szemléltető példák ellenére továbbra is – és talán nem alaptalanul – kételkedik, annak Maxwell véleményét ajánljuk a figyelmébe (lásd Maxwell művének korábban idézett oldalait), amely szerint „*Ez az elv magától értetődőnek tekinthető...*".

Természetesen matematikailag semmilyen szemlélet, intuíció vagy akár egy zseniális tudós kijelentése nem bizonyító erejű, de ez számunkra most nem is lényeges, hiszen a későbbiekben az elvet éppen az eredmények intuitív megsejtésére szeretnénk használni, nem pedig bizonyításra (és emiatt remélhetőleg az is megbocsájtható, ha ebben a fizikáról szóló részben a szemléletesség érdekében néhol esetleg kevésbé egzaktul fogalmaztunk a kelleténél). Annyit azért mindenképpen érdemes hozzáfűznünk, hogy Rayleigh törvénye valójában levezethető egy másik fizikai elvből, amely szerint egy adott hálózaton átfolyó egységnyi áram az összes lehetséges áthaladó egységnyi áramok közül a minimális energiaveszteséggel járó. Ezt az elvet szokás az ír fizikus, William Thomson (1824–1907), ismertebb nevén Lord Kelvin nevéhez kötni. Mindezekről bővebben olvashatunk az [5, 8] könyveknek a monotonitási elvről szóló fejezeteiben.

Végül megemlítjük, hogy a monotonitási törvény közlekedési hálózatokkal való illusztrációja egyáltalán nem légből kapott, ugyanis az elektromos hálózatok és az úgynevezett véletlen bolyongások elmélete – amelyben egy elágazásban a véletlen határozza meg a továbbhaladás irányát – szoros kapcsolatban áll egymással (erről bővebben olvashatunk a kiváló és nagyrészt középiskolások számára is érthető [5] könyvben).

3. A számtani és harmonikus közép egyenlőtlensége

Ennyi fizikai bevezető után térjünk most rá a matematikára: milyen eredményeket nyerhetünk az elektromos ellenállásokra vonatkozó ismereteink segítségével? Meglepő módon a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség egyszerűen „kipottyan" Rayleigh monotonitási törvényéből.



(a) Nyitott kapcsoló (b) Zárt kapcsoló

3. ábra. Számtani és harmonikus közép elektromos hálózatokban

Tekintsük ugyanis a 3. ábrán látható kapcsolási rajzokat: kétféle sorrendben sorosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokat párhuzamosan kapcsoltunk, és a két ágat egy kapcsolóval kötöttük össze, amely először nyitott, aztán zárt állapotban van. Számítsuk ki mindkét esetben a hálózat eredő ellenállását a kapcsoló belső ellenállását elhanyagolhatónak feltételezve. Nyitott kapcsoló esetén az egyes ágakban az eredő ellenállás $R_1 + R_2$, így a rendszer eredő ellenállása

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_1+R_2}} = \frac{R_1+R_2}{2}.$$

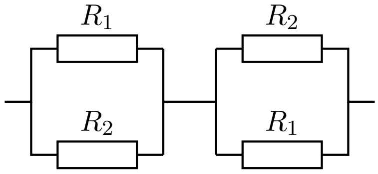
Zárt kapcsoló esetén az ellenállás-hálózat egyenértékű a 4. ábrán látható rendszerrel, amelyben sorba van kapcsolva két komponens, mindegyikben párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokkal. Ekkor mindkét komponens eredő ellenállása $(R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$, ezért a rendszer eredő ellenállása

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}} = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

És most jön a csavar. Rayleigh monotonitási törvénye alapján a kapcsoló zárásával a hálózat ellenállása nem növekedhet, hiszen nyitott állapotban a kapcsoló „végtelen ellenállású”, míg zárás után az ellenállása nulla – a közlekedési hálózatos példával élve a város egy eddig felújítás alatt álló útján megindulhat a forgalom. Ebből következően $R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}} \geq R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}}$, azaz

$$\frac{R_1+R_2}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}, \tag{3.1}$$

ami éppen az R_1, R_2 pozitív számok számtani és harmonikus közepei közötti egyenlőtlenség.



4. ábra. Zárt kapcsoló esete átrajzolva

Ahogy korábban, most is hangsúlyozzuk, hogy az iménti érvelés nem bizonyítás, hanem inkább egy fizikai elv látványos megjelenési formája (vagy akinek jobban tetszik, tekinthet a matematikai eredményre úgy, mint az elv egy speciális esetének bizonyítására). Természetesen a (3.1) egyenlőtlenség jól ismert, és egy korrekt igazolását nyerjük az alábbi egyszerűen ellenőrizhető azonosság segítségével, amelyből az egyenlőség feltétele, nevezetesen $R_1 = R_2$ is azonnal következik:

$$\frac{R_1+R_2}{2} - \frac{2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{(R_1-R_2)^2}{2(R_1+R_2)}. \tag{3.2}$$

Jegyezzük meg azt is, hogy a (3.1) egyenlőtlenség pozitív számokra egyenértékű a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségével, hiszen mindkét oldalnak az $(R_1+R_2)/2$ kifejezéssel való szorzása után az

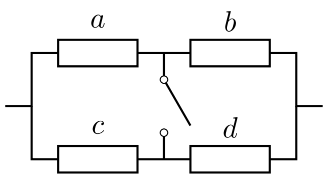
$$\frac{(R_1+R_2)^2}{4} \geq R_1R_2$$

alakot ölti, ahol az egyes oldalakon éppen a megfelelő közepek négyzete áll.

Dacára annak, hogy a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség előbbi „bizonyítása" igen meglepő és szellemes, mégsem terjedt el igazán a matematikai köztudatban. Bár a gondolatmenet általánosítása már 1960-ban megjelent (a történeti hátteret lásd részletesen a 7.11. Megjegyzésben), mégis viszonylag kevés olyan helyen tesznek említést róla, amely széles olvasóközönségnek szól (angolul a [8] könyvben és a [17] cikkben, magyar nyelvű szakirodalomban szinte sehol), és csak szűkebb körben ismerik. A szerző közvetlen munkatársai körében végzett mini közvéleménykutatás szerint lényegében teljesen ismeretlen, pedig az ötlet figyelemre méltó és messzemenően általánosítható. Folytassuk is ennek bemutatását!

4. Egy általánosítás

Az előző szakaszbeli gondolatmenet talán legkézenfekvőbb általánosítása, ha R_1 és R_2 ellenállások helyett (az egyszerűség kedvéért kis betűvel jelölt) a, b, c, d ellenállásokat tekintünk az 5. ábrán látható módon. Ekkor nyitott



5. ábra. A (4.2) egyenlőtlenség hálózata

kapcsoló esetén az eredő ellenállás

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}} = \frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}} = \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d},$$

míg zárt kapcsoló mellett

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}} = \frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}.$$

A monotonitási elv alapján $R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}} \geq R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}}$, vagyis

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}.$$

Az imént megsejtett egyenlőtlenség egy matematikailag helyes bizonyítása – a (3.2) azonosság mintájára – az alábbi észrevételen múlik:

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} - \frac{ac}{a+c} - \frac{bd}{b+d} = \frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)(a+c)(b+d)}. \tag{4.1}$$

4.1. Feladat. Ellenőrizzük a (4.1) azonosságot!

A (4.1) összefüggésből az egyenlőség kérdésére is azonnal választ kapunk, és rögtön meg is fogalmazhatjuk egy állítás formájában az eredményt.

4.2. Állítás. *Legyenek a, b, c, d nemnegatív valós számok, amelyekre $a+c>0$ és $b+d>0$. Ekkor*

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}, \tag{4.2}$$

és egyenlőség csakis $ad = bc$ esetén áll fenn.

4.3. *Megjegyzés.* Az egyenlőség $ad = bc$ feltételét – itt most lényeges, hogy a, b, c, d nem lehetnek különböző előjelűek – átfogalmazhatjuk úgy is, hogy az (a, b) és (c, d) síkbeli vektorok azonos irányúak (beleértve azt az esetet is, amikor valamelyik esetleg nullvektor). Valóban, ez utóbbi összefüggés azt jelenti, hogy van olyan $\lambda \geq 0$ szám, amelyre $a = \lambda c$ és $b = \lambda d$. Ha $\lambda = 0$, akkor $(a, b) = (0{,}0)$, így a két vektor azonos irányú; ha pedig $\lambda > 0$, akkor $d = b/\lambda$, és így $ad = (\lambda c)\cdot(b/\lambda) = bc$. Fordítva, amennyiben $ad = bc \neq 0$, akkor $a/c = b/d = \lambda > 0$, hiszen ebben az esetben a, b, c, d pozitív számok. Ha pedig $ad = bc = 0$, akkor a szimmetria miatt feltehető, hogy $a = 0$, ekkor $b = 0$ vagy $c = 0$; az első esetben $(a, b) = (0{,}0)$, míg a másodikban $(a, b) = (0, b)$, $(c, d) = (0, d)$, mindkétszer a kérdéses vektorok azonos irányúak.

4.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy nemnegatív a, b, c, d számok esetén az (a, b) és (c, d) vektorok pontosan akkor azonos irányúak, amikor az (a, c) és (b, d) vektorok azonos irányúak.

Bevezetve a

$$H(x,y) = \frac{2xy}{x+y} \tag{4.3}$$

jelölést az x, y nemnegatív és egyszerre nem nulla számok harmonikus középére (a harmonikus közép eredeti formájában az $x, y > 0$ feltételezés lenne szükséges), a (4.2) egyenlőtlenség 2-vel való szorzás után a következő, könnyen megjegyezhető alakot ölti:

$$H(a+b, c+d) \geq H(a,c) + H(b,d). \tag{4.4}$$

4.5. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a (4.4) egyenlőtlenség (vagy esetleg a fordított iránya) igaz marad-e, ha a harmonikus közepet a számtani ($A(x,y)$), mértani ($G(x,y)$) és négyzetes ($Q(x,y)$) közepek valamelyikére cseréljük, ahol

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \quad G(x,y) = \sqrt{xy}, \quad Q(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

A (4.2) egyenlőtlenség akármelyik alakját is nézzük, azt gondolhatnánk, hogy valószínűleg nem tartozik a versenyfeladatokban leggyakrabban alkalmazott egyenlőtlenségek közé. Ez azonban nem feltétlenül igaz, hiszen a (4.2) egyenlőtlenség nemrég például a KöMaLban is felbukkant, méghozzá a 2012. májusi számban kitűzött B. 4461. és A. 563. jelű feladatok egyik megoldásában kapott szerepet (lásd a nyomtatásban és az interneten közölt [6] megoldásokat). Az említett feladatok cikkünk témakörén kívül esnek, ezért most ezekre nem térünk ki. Annyit viszont még mindenképpen megemlítünk, hogy a két feladat megoldásában valójában a (4.2) egyenlőtlenség alábbi általánosítására volt szükség.

4.6. Állítás. *Legyenek a, b, c, d nemnegatív valós számok, amelyekre $a+c>0$ és $b+d>0$, továbbá legyen $p \geq 1$ valós szám. Ekkor*

$$(a+b+c+d)^{p-2}(a+b)(c+d) \geq (a+c)^{p-2}ac + (b+d)^{p-2}bd,$$

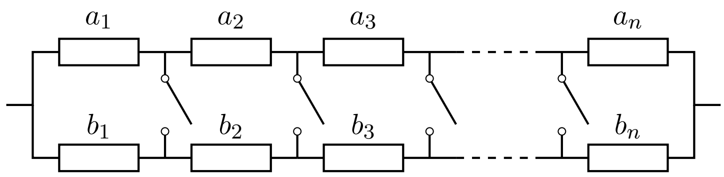
és egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha $p=1$ és $ad=bc$.

4.7. Feladat. Igazoljuk a 4.6. Állítást (a $p=1$ eset ismeretében)! (Segítség: $(a+c)^{p-2} = (a+c)^{p-1}/(a+c)$.)

Térjünk vissza ezek után az ellenállásokra és folytassuk a Rayleigh-féle monotonitási törvény alkalmazásainak sorát!

5. A Milne-egyenlőtlenség

Egy további általánosítási lehetősége az 5. ábrán szereplő hálózatnak, ha két ellenállás helyett n darabot kapcsolunk sorosan, majd két ilyen rendszert



6. ábra. Az (5.1) egyenlőtlenség hálózata

párhuzamosan kapcsolunk össze a 6. ábrán látható módon. Ekkor az összes kapcsolót nyitva hagyva, az egyes ágakban az eredő ellenállás $a_1+\dots+a_n$ és $b_1+\dots+b_n$, így az eredő ellenállás

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}} = \frac{(a_1+\dots+a_n)(b_1+\dots+b_n)}{a_1+\dots+a_n+b_1+\dots+b_n}.$$

Zárt kapcsolók mellett a hálózat a 7. ábrán láthatóval egyenértékű, ahol párhuzamosan kapcsolt a_i, b_i ellenállásokból álló komponensek vannak sorosan kapcsolva. Az egyes komponensek eredő ellenállása $a_ib_i/(a_i+b_i)$, ebből következően az összes kapcsoló zárása után a 6. ábra hálózatának eredő ellenállása

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}} = \frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}.$$

Mivel a Rayleigh-féle monotonitási törvény szerint $R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}} \geq R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}}$, ezért a_i+ $+b_i > 0$ $(i=1,\dots,n)$ esetén várhatóan igaz a következő egyenlőtlenség:

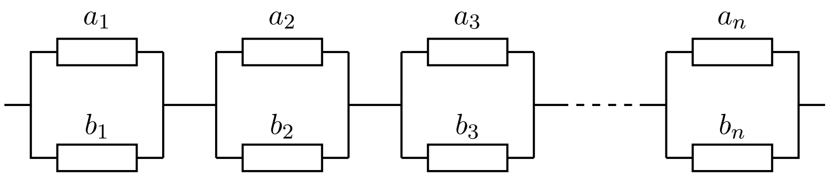
$$\frac{(a_1+\dots+a_n)(b_1+\dots+b_n)}{a_1+\dots+a_n+b_1+\dots+b_n} \geq \frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}, \tag{5.1}$$

amit másképpen (2-vel való szorzás után) úgy is írhatunk, hogy

$$H(a_1+\dots+a_n, b_1+\dots+b_n) \geq H(a_1,b_1)+\dots+H(a_n,b_n). \tag{5.2}$$

Ez $n=2$ esetén éppen a (4.2) egyenlőtlenség, ebből pedig teljes indukcióval nem nehéz belátni az általános esetet. Valóban, ha n-re igaz az (5.2) egyenlőtlenség, akkor az $a = a_1+\dots+a_n$, $b = a_{n+1}$, $c = b_1+\dots+b_n$, $d = b_{n+1}$ szereposztással a (4.2) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} H(a_1+\dots+a_n+a_{n+1}, b_1+\dots+b_n+b_{n+1}) &\geq \\ \geq H(a_1+\dots+a_n, b_1+\dots+b_n)&+H(a_{n+1},b_{n+1}), \end{aligned}$$



7. ábra. A 6. ábra hálózata átrajzolva zárt kapcsolók esetén

ahol a jobb oldalon az indukciós feltevés alkalmazásával éppen $(n+1)$-re adódik az (5.2) egyenlőtlenség.

Az iménti indukciós gondolatmenet segítségével azt sem nehéz igazolni, hogy egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha az $(a_1,\dots,a_n)$ és $(b_1,\dots,b_n)$ vektorok azonos irányúak, amin azt értjük, hogy létezik $\lambda \ge 0$ szám, amellyel $a_i{=}\lambda b_i$ minden $i{=}1,\dots,n$ esetén. Valóban, az egyenlőség feltétele $n{=}2$ esetén a 4.3. Megjegyzésből következik. Ha pedig n-re már tudjuk a feltételt, akkor az indukciós lépésből kiolvasható, hogy csak úgy lesz egyenlőség $(n+1)$-re, ha az indukciós feltevésben is egyenlőség áll fenn, tehát az $(a_1,\dots,a_n)$ és $(b_1,\dots,b_n)$ vektorok azonos irányúak, valamint az is szükséges, hogy az

$$(a,b) = (a_1+\dots+a_n, a_{n+1})$$

és

$$(c,d) = (b_1+\dots+b_n, b_{n+1}) = (\lambda(a_1+\dots+a_n), b_{n+1})$$

vektorok azonos irányúak legyenek. Ebből szükségképpen $a_{n+1} = \lambda b_{n+1}$ adódik, tehát az $(a_1,\dots,a_{n+1})$ és $(b_1,\dots,b_{n+1})$ vektorok azonos irányúak.

Érvényes tehát a következő állítás.

5.1. Állítás. *Legyenek a_i, b_i $(i=1,\dots,n)$ nemnegatív számok, amelyekre $a_i+b_i>0$ minden $i=1,\dots,n$ esetén. Ekkor*

$$\frac{(a_1+\dots+a_n)(b_1+\dots+b_n)}{a_1+\dots+a_n+b_1+\dots+b_n} \ge \frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az $(a_1,\dots,a_n)$ és $(b_1,\dots,b_n)$ vektorok azonos irányúak.

Érdemes megjegyeznünk, hogy az 5.1. Állítás előbbiekben bemutatott teljes indukciós bizonyítása mellett az általános esetben is működik az $n=2$ esetén alkalmazott (4.1) azonosságnak megfelelő négyzetösszeggé való alakítás ötlete. Ennek tömör és átlátható megfogalmazásához azonban célszerű bevezetnünk egy – sokak számára bizonyára már ismerős – jelölést.

5.2. Jelölés. Ha $a_1,\dots,a_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1+a_2+\dots+a_n,$$

amit úgy olvasunk, hogy „szumma $i=1$-től n-ig a_i". Használni fogjuk még a

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}$$

típusú jelölést is, amelyben – magától értetődően – az $1\le i<j\le n$ feltételt kielégítő összes i, j indexpárra kell összegezni.

A szummás jelölés segítségével az 5.1. Állítás valójában egy – kis odafigyeléssel és türelemmel – könnyen ellenőrizhető azonosságra vezethető vissza, amelyet az alábbi feladatban fogalmazunk meg (a feladat megoldása jó gyakorlási lehetőség a szummás jelölésmód elsajátításához).

5.3. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right) = \\ = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{(a_ib_j-a_jb_i)^2}{(a_i+b_i)(a_j+b_j)}.$$

5.4. *Történeti megjegyzés.* Az 5.1. Állításban szereplő egyenlőtlenséget az irodalomban szokás Milne-egyenlőtlenségnek is hívni. Edward Arthur Milne (1896–1950) angol asztrofizikus és matematikus 1925-ben csillagászati vizsgálódásai kapcsán írta fel az egyenlőtlenség folytonos változatát integrálok segítségével (lásd a [10] cikket), és a bizonyítás közben lényegében megfogalmazta az általunk kimondott diszkrét változatot is. A Milne-egyenlőtlenség igazolását feladatként a neves kanadai, többnyire nehezebb versenyfeladatok kitűzésére specializálódott Crux Mathematicorum folyóirat is kitűzte 1996-ban. Egy évvel később három különböző megoldást jelentettek meg, amelyek egyike éppen az 5.3. Feladatban szereplő azonosság (lásd [1]).

A szakasz zárásaként a nevezetes egyenlőtlenségekkel foglalkozó [4] könyvecske egy nehezebb feladatát idézzük, amely a Milne-egyenlőtlenség fényében szinte nyilvánvalóvá egyszerűsödik (ezért próbáljuk többféleképpen is megoldani, és a könyv megoldását is olvassuk el).

5.5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, \dots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\dots+\frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}} \ge \frac{1}{n}.$$

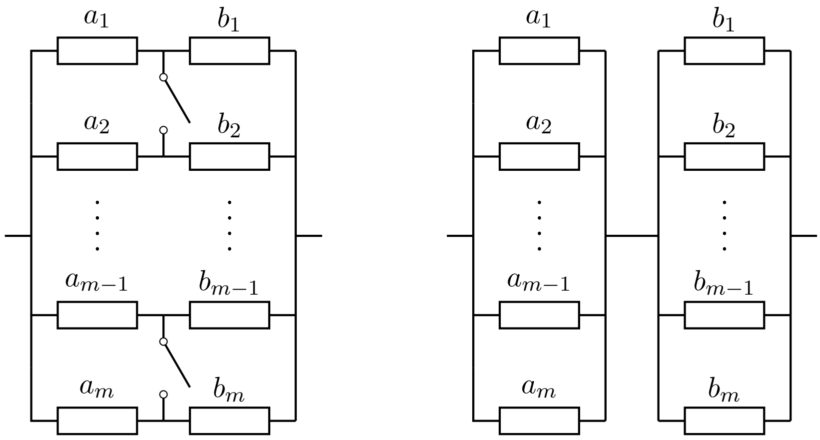
6. A Minkowski-egyenlőtlenség egy speciális esete

Térjünk ismét vissza az 5. ábra hálózatához, és most az előző szakasszal ellentétben ne a sorosan kötött ellenállások számát növeljük, hanem a párhuzamosan kapcsoltakét. Más szóval tekintsük a 8a. ábrán lévő ellenálláshálózatot! Ha az összes kapcsoló nyitott, akkor az eredő ellenállás

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nyitott}} = \frac{1}{\frac{1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{1}{a_m+b_m}},$$

zárt kapcsolók esetén pedig

$$R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{zárt}} = \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_m}} + \frac{1}{\frac{1}{b_1}+\dots+\frac{1}{b_m}},$$



(a) Nyitott kapcsolók (b) Zárt kapcsolók esete átrajzolva

8. ábra. A (6.7) egyenlőtlenség hálózatai

hiszen a hálózat a 8b. ábrán lévő rendszerrel egyenértékű. A Rayleigh-féle monotonitási törvényből következően $R_e^{\text{nyitott}} \geq R_e^{\text{zárt}}$, ezért $a_i, b_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ esetén egy újabb egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{1}{a_m+b_m}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_m}} + \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_m}}.$$

Ha bevezetjük a

$$H_m(x_1, \ldots, x_m) := \frac{m}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_m}} \tag{6.1}$$

jelölést az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pozitív számok harmonikus közepére (H_2 megegyezik a (4.3) képletben H-val jelölt kétváltozós harmonikus középpel), akkor a monotonitási elvből adódott egyenlőtlenség a

$$H_m(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \geq H_m(a_1, \ldots, a_m) + H_m(b_1, \ldots, b_m) \tag{6.2}$$

alakkal ekvivalens. Az $m=2$ speciális esetben ez éppen a (4.2) egyenlőtlenség, és az általános eset bizonyítására ismét a teljes indukció módszere kínálkozik. Most azonban az indukciós lépés nem teljesen magától értetődő, az indukciós feltevést cselesebben kell alkalmaznunk.

Tegyük fel tehát, hogy a (6.2) egyenlőtlenség fennáll valamilyen m esetén tetszőleges pozitív szám m-esekre. Alkalmazva ekkor az indukciós feltevést az

$$\tilde{a}_1 = a_1, \ldots, \tilde{a}_{m-1} = a_{m-1}, \tilde{a}_m = (a_m^{-1} + a_{m+1}^{-1})^{-1}$$

és

$$\tilde{b}_1 = b_1, \ldots, \tilde{b}_{m-1} = b_{m-1}, \tilde{b}_m = (b_m^{-1} + b_{m+1}^{-1})^{-1}$$

szám m-esekre

$$H_m(\tilde{a}_1+\tilde{b}_1,\dots,\tilde{a}_m+\tilde{b}_m) \geq H_m(\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_m)+H_m(\tilde{b}_1,\dots,\tilde{b}_m). \tag{6.3}$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} H_m(\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_m) &= \frac{m}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{(a_m^{-1}+a_{m+1}^{-1})^{-1}}} = \\ &= \frac{m}{m+1}H_{m+1}(a_1,\dots,a_m,a_{m+1}), \end{aligned} \tag{6.4}$$

és hasonlóan

$$H_m(\tilde{b}_1,\dots,\tilde{b}_m) = \frac{m}{m+1}H_{m+1}(b_1,\dots,b_m,b_{m+1}). \tag{6.5}$$

Ezek után vegyük egy kicsit szemügyre a (6.3) egyenlőtlenség jobb oldalát. A (4.2) egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m+\tilde{b}_m &= (a_m^{-1}+a_{m+1}^{-1})^{-1}+(b_m^{-1}+b_{m+1}^{-1})^{-1} \leq \\ &\leq \left((a_m+a_{m+1})^{-1}+(b_m+b_{m+1})^{-1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Mivel a H_m függvény mindegyik változóban monoton növő – számunkra ebben a pillanatban csupán az utolsó változó a lényeges –, ezért az előbbi egyenlőtlenségből következően

$$\begin{aligned} &H_m(\tilde{a}_1+\tilde{b}_1,\dots,\tilde{a}_m+\tilde{b}_m) \leq \\ &\leq H_m\left(\tilde{a}_1+\tilde{b}_1,\dots,\left((a_m+a_{m+1})^{-1}+(b_m+b_{m+1})^{-1}\right)^{-1}\right) = \\ &= \frac{m}{m+1}H_{m+1}(a_1+b_1,\dots,a_{m+1}+b_{m+1}). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Most már nincs más hátra, mint a (6.4), (6.5) és (6.6) összefüggéseket a (6.3) egyenlőtlenség megfelelő oldalaiba helyettesíteni, és ekkor $m/(m+1)$-gyel való egyszerűsítés után éppen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &H_{m+1}(a_1+b_1,\dots,a_{m+1}+b_{m+1}) \geq \\ &\qquad \geq H_{m+1}(a_1,\dots,a_{m+1})+H_{m+1}(b_1,\dots,b_{m+1}), \end{aligned}$$

amivel az indukciós lépés készen van. Az alábbi állítást nyertük tehát.

6.1. Állítás. *Legyenek a_i, b_i $(i=1,\dots,m)$ pozitív számok. Ekkor*

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{1}{a_m+b_m}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_m}}+\frac{1}{\frac{1}{b_1}+\dots+\frac{1}{b_m}}, \tag{6.7}$$

avagy másképpen

$$H_m(a_1+b_1,\dots,a_m+b_m) \geq H_m(a_1,\dots,a_m)+H_m(b_1,\dots,b_m). \tag{6.8}$$

6.2. Feladat. Mutassuk meg (a bizonyítás végigkövetésével), hogy a (6.7) egyenlőtlenségben pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha az $(a_1, \dots, a_m)$, $(b_1, \dots, b_m)$ vektorok azonos irányúak.

A korábban már bevezetett szummás jelölésmóddal a (6.7) egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^{-1}\right)^{-1} \geq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^{-1}\right)^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^{-1}\right)^{-1}.$$

Ez az alak valójában speciális esete egy sokkal általánosabb egyenlőtlenségcsaládnak, amelyben a (-1) kitevő helyett tetszőleges valós $p \neq 0$ kitevő szerepel: ha $p \geq 1$ és x_i, y_i $(i = 1, \dots, m)$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}, \tag{6.9}$$

ha pedig $p < 1, p \neq 0$ és az x_i, y_i számok mind pozitívak, akkor fordított egyenlőtlenség teljesül. Ezt az egyenlőtlenségcsaládot, legalábbis a $p \geq 1$ esetét az irodalomban Minkowski-egyenlőtlenség néven szokás hívni (a $p < 1$ esetet inkább fordított Minkowski-egyenlőtlenségnek). Hermann Minkowski (1864–1909) német matematikus – aki ugyancsak a Königsbergi Egyetemen tanult – 1896-ban igazolta az egyenlőtlenséget geometriai vizsgálódásai során (lásd a [11] könyv 115–117. oldalait). A $p = 2$ speciális esetben

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$$

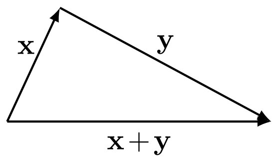
éppen az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ m-dimenziós vektor euklidészi hossza (gondoljunk az $m = 2{,}3$ speciális esetekre), amelyre bevezetve az $|\mathbf{x}|$ jelölést, a Minkowski-egyenlőtlenség az

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

tömör alakba írható át. Ez az úgynevezett m-dimenziós háromszög-egyenlőtlenség, amelyet kétdimenzióban bizonyára mindenki jól ismer és a 9. ábra szemléltet: tetszőleges – akár elfajuló – háromszögben bármely két oldal hosszának összege legalább akkora, mint a harmadik oldal hossza (mi köze ennek a 4.5. Feladathoz?). A 9. ábráról az is világos, hogy egyenlőség csak akkor van, ha az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok azonos irányúak.

A $p \geq 1$ esetben az

$$|\mathbf{x}|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$$



9. ábra. Háromszög-egyenlőtlenség

képlettel az euklidészi hosszúság fogalmának egy általánosítása, úgynevezett norma értelmezhető – vajon mit ad $|\mathbf{x}|_p$, ha $p \to \infty$? –, amelyre nézve a Minkowski-egyenlőtlenség éppen a háromszög-egyenlőtlenség:

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|_p \leq |\mathbf{x}|_p + |\mathbf{y}|_p.$$

A Minkowski-egyenlőtlenségnek egy másik interpretációját adják a hatványközepek. Az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pozitív valós számok p-edik hatványközepe (ahol p tetszőleges nem nulla valós szám)

$$M_p(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_m^p}{m}\right)^{1/p}. \tag{6.10}$$

Speciálisan $p = 1$ esetén

$$M_1(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m},$$

a számtani, $p = 2$ esetén

$$M_2(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2}{m}}$$

a négyzetes közép, továbbá $p = -1$ esetén

$$M_{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \frac{m}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m}}$$

a már korábban (lásd a (6.1) formulát) H_m-mel jelölt harmonikus közép. Sőt némi analízis segítségével (lásd a [13] könyv 248–250. oldalait) belátható az is, hogy M_p formulája folytonosan kiterjeszthető a $p = 0$ értékre is, mégpedig

$$M_0(a_1, a_2 \ldots, a_m) = \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m}$$

a geometriai közép. Ekkor a (6.9) Minkowski-egyenlőtlenséget és a fordítottját $m^{1/p}$-nel osztva, pozitív $x_i = a_i, y_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ számok választásával éppen azt kapjuk, hogy $p \geq 1$ esetén

$$M_p(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \leq M_p(a_1, \ldots, a_m) + M_p(b_1 + \ldots, b_m);$$

ha pedig $p<1$ (a $p=0$ esetet is beleértve), akkor fordított egyenlőtlenség érvényes. Mindez a (6.8) egyenlőtlenség általánosítása a hatványközepekre (amely a 4.5. Feladat kérdéseire is választ ad).

A Minkowski-egyenlőtlenség általános esetével kapcsolatban további olvasmányként a [18] cikket ajánljuk, amely a konvexitás fogalmának segítségével közös kiindulópontra vezeti vissza a Minkowski-, a Milne- és még más nevezetes egyenlőtlenségeket, valamint a Milne-egyenlőtlenség egy általánosítását is megfogalmazza.

6.3. *Megjegyzés.* Megmutatható, hogy ha Ohm törvénye helyett a nemlineáris

$$U = R\cdot I^{-1/p}$$

összefüggés lenne érvényes az ellenállásokra (ahol $p=-1$ felel meg Ohm törvényének), akkor az eddigiekben tárgyalt megfontolások általánosításaként éppen a Minkowski-egyenlőtlenséget nyerjük. Erről kicsit bővebben olvashatunk a [15] cikkben.

7. Számtani és harmonikus közép újra

Elérkeztünk cikkünk legáltalánosabb ellenállás-hálózatához, ezt mutatja a 10. ábra. Az összes kapcsoló nyitott, majd zárt állapotában felírva az eredő ellenállást, és ezután kihasználva Rayleigh monotonitási törvényét, az előző szakaszok hálózatainak mintájára könnyen látható, hogy az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk.

7.1. Állítás. *Ha* a_{ij}, b_{ij} $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$ *pozitív számok, akkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{-1}\right)^{-1} \geq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^{-1}\right)^{-1}, \tag{7.1}$$

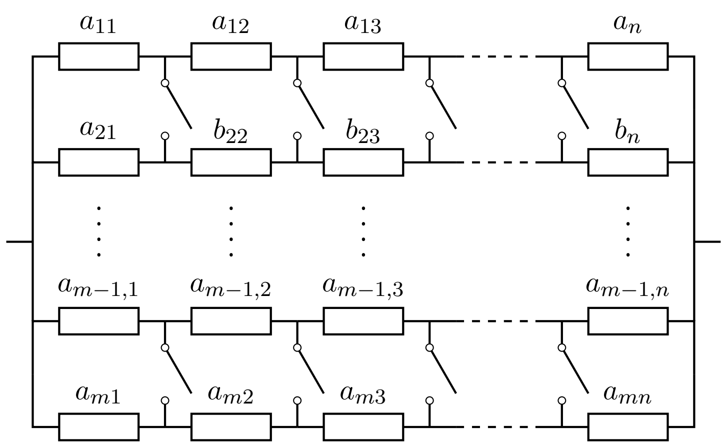
vagy ekvivalensen

$$\begin{aligned} H_m(a_{11}+\dots+a_{1n}, a_{21}+\dots+a_{2n},\dots,a_{m1}+\dots+a_{mn}) \geq \\ \geq H_m(a_{11},\dots,a_{m1})+H_m(a_{12},\dots,a_{m2})+\dots+H_m(a_{1n},\dots,a_{mn}). \end{aligned}$$

Speciálisan n=2 esetén éppen a már igazolt (6.7) egyenlőtlenséget kapjuk, és ebből kiindulva az 5.1. Állítás bizonyításának mintájára n-re vonatkozó teljes indukcióval rögtön adódik az általános eset.

7.2. Feladat. Gondoljuk végig a 7.1. Állítás bizonyítását n-re vonatkozó teljes indukcióval, és mutassuk meg, hogy egyenlőség csakis akkor teljesül, ha az $(a_{1j},\dots,a_{mj})$ $(j=1,\dots,n)$ vektorok páronként azonos irányúak.

Természetesen az n-re vonatkozó teljes indukció helyett m-re vonatkozó indukciót is használhatunk az $m=2$ esetből (vagyis az 5.1. Állításból) kiindulva úgy, ahogyan a (6.7) egyenlőtlenséget is igazoltuk.



10. ábra. A (7.1) egyenlőtlenség hálózata

7.3. Feladat. Gondoljuk végig a 7.1. Állítás bizonyítását m-re vonatkozó teljes indukcióval, és mutassuk meg, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ $(i = 1, \dots, m)$ vektorok páronként azonos irányúak.

A jobb átláthatóság érdekében gyakran célszerű az a_{ij} $(i = 1, \dots, m; j = = 1, \dots, n)$ számokat egy $m \times n$-es táblázatba, matematikai nyelven $m \times n$-es mátrixba rendezni:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Az egyenlőség 7.2. és 7.3. Feladatokban megfogalmazott feltételeiből következően a mátrixra az alábbi kis állítást nyertük.

7.4. Állítás. *Az A mátrix oszlopaiból képzett m-dimenziós vektorok pontosan akkor azonos irányúak, amikor a sorokból képzett n-dimenziós vektorok azonos irányúak.*

7.5. Feladat. Igazoljuk közvetlenül (a 7.2. és 7.3. Feladatok felhasználása nélkül) a 7.4. Állítást!

Térjünk még vissza a (7.1) egyenlőtlenségre néhány gondolat erejéig. Először is érdemes végiggondolni, hogy milyen egyenlőtlenségeket kapunk, ha a 10. ábra hálózatában nem az összes kapcsolót zárjuk.

7.6. Feladat. Írjuk fel, hogy milyen egyenlőtlenségek adódnak a Rayleigh-féle monotonitási elvből, ha a 10. ábra hálózatában csak bizonyos sorok vagy oszlopok kapcsolóit zárjuk.

A (7.1) egyenlőtlenségnek egy speciális esete is figyelemre méltó. Tekintsük ugyanis az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

szereposztást, ahol a jobb oldali mátrix „egy sorát eggyel balra tolva és a legutolsó elemet előre helyezve" kaptuk a rákövetkező sort. Könnyen látható, hogy ekkor a (7.1) egyenlőtlenség az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \tag{7.2}$$

ami éppen az $a_1, \ldots, a_n$ számok számtani és harmonikus közepei közötti egyenlőtlenség.

7.7. Feladat. Bizonyítsuk be (a (7.1) egyenlőtlenségbeli egyenlőség feltételének ismeretében), hogy a (7.2) egyenlőtlenségben pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

A két pozitív szám számtani és harmonikus közepei között érvényes (3.2) azonosság valójában n pozitív szám esetére is általánosítható, és ezzel egy újabb bizonyítást nyerünk a (7.2) egyenlőtlenségre.

7.8. Feladat. Alakítsuk négyzetösszeggé a

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

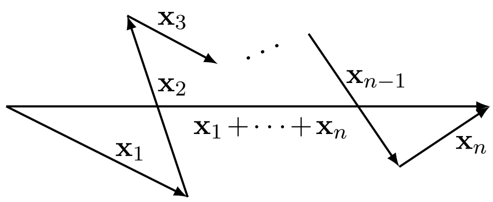
kifejezést! Segítség: $n=3$ esetén

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}} = \frac{(a_1-a_2)^2a_3+(a_2-a_3)^2a_1+(a_1-a_3)^2a_2}{3(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)}.$$

7.9. *Megjegyzés.* A (6.7) egyenlőtlenséghez hasonlóan a (7.1) egyenlőtlenség is valójában egy általánosabb család tagja: ha $p \geq 1$ és x_{ij} $(i=1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n)$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right|^p\right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|x_{ij}|^p\right)^{1/p}, \tag{7.3}$$

ha pedig $p<1, p \neq 0$ és az x_{ij} számok mind pozitívak, akkor fordított az egyenlőtlenség iránya. A p=2 eset nem más, mint az m-dimenziós háromszög-egyenlőtlenségnek a „töröttvonal-egyenlőtlenség" változata, mely szerint egy



11. ábra. Háromszög-egyenlőtlenség általánosítása

zárt töröttvonal bármely oldalának hossza legfeljebb akkora, mint a többi oldal hosszának összege. Valóban, az $\mathbf{x}_j=(x_{1j},\dots,x_{mj})$ $(j=1,\dots,n)$ vektorok bevezetésével arról van szó, hogy

$$|\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_n| \le |\mathbf{x}_1|+\cdots+|\mathbf{x}_n|,$$

amit a 11. ábra szemléltet. Erről az egyenlőség feltétele is szemléletes, az $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ vektoroknak páronként azonos irányúaknak kell lenniük.

7.10. Feladat. Fogalmazzuk meg a (7.3) egyenlőtenséget (a (6.10) képlettel értelmezett) hatványközepek segítségével!

7.11. *Történeti megjegyzés.* A (7.1) egyenlőtlenségnek a 10. ábra ellenálláshálózatához való szoros kapcsolatát először Alfred Lehman (1931–2006) vette észre, aki 1960-ban a SIAM Review folyóirat feladatrovatában – amelynek egyébként Murray S. Klamkin (1921–2004), amerikai matematikus és rendkívül termékeny feladatkitűző volt a szerkesztője – írta le az ötletet, és tűzte ki feladatként a precíz bizonyítást (lásd [7]). Lehman kapcsolók nyitása és zárása helyett egyszerűen rövidre zárta az ellenállásokat, de talán a kapcsolók beiktatása természetesebb gondolat, ezért érveltünk mi így. A kitűzött feladatra beérkezett megoldások közül a rovatban két évvel később Fazlollah Reza (1915–) – idén 100 éves! – perzsa matematikus megoldását jelentették meg, amely éppen az általunk is tárgyalt teljes indukciós bizonyítás. Emellett Lehman megjegyzéseit is közölték, amelyben felhívja a figyelmet a Minkowski-egyenlőtlenséggel való rokonságra, valamint a 6.3. Megjegyzés végén említett nemlineáris Ohm-törvénnyel kapcsolatos általánosítási lehetőségekre. Mindezek miatt gyakran a különböző cikkekben Lehman-egyenlőtlenségként emlegetik a (4.2) egyenlőtlenséget, miközben azt Milne már jóval korábban és általánosabb formában használta.

Bár cikkünk lassan a végéhez közeledik, de az általánosítások sora korántsem ér véget. A tárgyalt ellenállások helyett ugyanis több be- és kimenettel rendelkező (többpólusú) ellenállásokat is egymáshoz kapcsolhatunk. Ekkor az ellenállásokat egyetlen szám helyett egy mátrixszal írhatjuk le. Soros kapcsolás esetén az eredő ellenállást a mátrixok (elemenként vett) összege adja meg, párhuzamos kapcsolás esetén az (1.3) összefüggés megfelelő általánosítása lesz érvényben és mátrixok úgynevezett parallel összegét kapjuk. Ennek segítségével lehet például értelmezni két mátrix harmonikus közepét. Éppen ez motiválta és indította el a mátrixok, majd még általánosabb objektumok – úgynevezett operátorok – közepei elméletének fejlődését a 1960-as évek végétől kezdődően, amely azóta is igen aktív és népszerű kutatási terület (mátrixok közepeiről magyarul a [12] cikkben olvashatunk).

8. Zárás: további fizika a matematikában

Cikkünkben egy remélhetőleg sokak számára meglepő és érdekes példáját mutattuk annak, hogy tisztán matematikai jellegű állítások – úgymint algebrai egyenlőtlenségek – mögött is rejtőzhetnek fizikai elvek és törvények, amelyek egy csapásra szemléletessé és világossá tehetik az addig kissé száraznak tűnő összefüggéseket. Ahogy a bevezetőben is utaltunk rá, számtalan helyen találkozhatunk hasonló gyöngyszemekkel a matematikában, a már idézett [8] könyv rengeteg ilyen témakört tárgyal – többek között a Pitagorasz-tételnek legalább fél tucat „fizikai bizonyítását” mutatja be. Ezenkívül Pólya György kiváló [14] könyvében egy egész fejezetet szán a témakörre, valamint a [16] szakdolgozatban is bőven talál az Olvasó fizikai érveléseket matematikai eredményekre. További érdekes olvasnivalókat sorolunk fel az irodalomjegyzékben, ahol a legtöbb mű elektronikus változatának elérhetőségét is megadjuk (a linkek 2015. augusztusi állapotot tükröznek). Bízunk benne, hogy minél többen, diákok és tanárok egyaránt hasznát veszik majd a középiskolai matematikával és fizikával való foglalkozás során.

Hivatkozások

[1] F. Ardila, K. W. Lau, V. N. Murty, Solution to problem 2113, *Crux Mathematicorum*, **23** (1997), 112–114. Elektronikus változat: `https://cms.math.ca/crux/v23/n2/page112-128.pdf`

[2] V. I. Arnold, *Katasztrófaelmélet*, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[3] V. I. Arnold, A matematika tanításáról (fordította: Kersner Róbert), *Magyar Tudomány*, 1998. október, 1247–1251. Elektronikus változat angolul: `http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html`

[4] Ábrahám Gábor, *Nevezetes egyenlőtlenségek*, MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.

[5] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks*, The Carus Mathematical Monographs, No. 22, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984. Elektronikus változat: `https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf`

[6] KöMaL B. 4461. és A. 563. feladatok megoldása, *KöMaL*, 2012/5, 273–274. Elektronikus változat: http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4461

[7] A. Lehman, A Resistor Network Inequality, *SIAM Rev.*, **2** (1960), 152–153. Elektronikus változat: http://www.jstor.org/stable/2027374

[8] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[9] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Volume 1, Calendron Press, Oxford, 1873. Elektronikus változat: https://archive.org/details/atreatiseonelec03maxwgoog

[10] E. A. Milne, Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **85** (1925) 979–984. Elektronikus változat: http://mnras.oxfordjournals.org/content/85/9/979.full.pdf

[11] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig, 1896. Elektronikus változat: https://archive.org/details/geometriederzahl00minkrich

[12] Pálfia Miklós, Petz Dénes, Tsuyoshi Ando professzorról. Unitér dilatációk és mátrixok közepei, *Polygon*, **XVI** (2007), 1–16. Elektronikus változat: http://www.renyi.hu/~petz/pdf/ando.pdf

[13] Pintér Lajos, Analízis I., Speciális matematika tankönyvek, Typotex, Budapest, 1998. Elektronikus változat: http://www.interkonyv.hu/konyvek/Analízis_1

[14] Pólya György, *Indukció és analógia: A matematikai gondolkodás művészete I.*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1988.

[15] F. Reza, A. Lehman, A Resistor Network Inequality, *SIAM Rev.*, **4** (1962), 150–155. Elektronikus változat: http://www.jstor.org/stable/2028375

[16] Simon Júlia, *Gondolkodjunk a fizika segítségével!*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 2014. Elektronikus változat: http://abesenyei.web.elte.hu/theses/simon.pdf

[17] A. Witkowski, Proof Without Words: An Electrical Proof of the AM-HM Inequality, *Math. Mag.*, **87** (2014), 275. Elektronikus változat: http://www.jstor.org/stable/10.4169/math.mag.87.4.275

[18] G. Woeginger, When Cauchy and Hölder Met Minkowski: A Tour through Well-Known Inequalities, *Math. Mag.*, **82** (2009), 202–207. Elektronikus változat: http://www.jstor.org/stable/27765902