Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

5. előadás (március 12.)

Az óra elején szóban emlékeztettem arra, hogy hol is tartunk: a Jordan-mérték tulajdonságait tárgyaltuk. Szót ejtettem arról is, hogy az eltolásinvariancia mellett a hasonlóságra vett invariancia is könnyen igazolható. A nehézséget valójában a forgatás okozza, mert ekkor tégla nem feltétlenül téglába megy át, így téglafedés sem téglafedésbe. Mindezt nem írtam le, csak „meséltem".

Ezután rátértünk az előadás első témájára: konkrét halmazok területe. Rögtön értelmeztük a normáltartomány fogalmát (amely egyébként már az egyváltozós analízis tanulmányok során előkerült): ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és $f \le g$, akkor

$$N_{f,g} := \{(x,y) : a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}.$$

Kimondtam tételként, hogy ha f és g integrálható függvények, akkor az $N_{f,g}$ halmaz mérhető és $t(N_{f,g}) = \int_a^b (g-f)$. A bizonyítás első lépéseként észrevettük, hogy elég az $f = 0$ eset igazolása, mert az általános erre visszavezethető (a tartomány eltolásával és az additivitás alkalmazásával). Az $f = 0$ eset pedig azon múlt, hogy egy alsó összeget egymásba nem nyúló beírt téglák területösszegeként foghatunk fel, egy felső összeget pedig téglafedés területösszegeként. Ezekből egy egyenlőtlenségláncolat adódott, ahonnan kipottyant a normáltartomány mérhetősége és területe.

Példaképpen megjegyeztük, hogy a tétel alapján háromszög, körlap és ellipszislap mind mérhető halmazok, hiszen előállnak normáltartományként (az ellipszis esetében meg is néztük a két függvényt). A konkrét területek kiszámolása gyakorlaton lesz. Annyit még hozzáfűztem, hogy háromszög esetében normáltartományként számolva a területet (általában) nem a megszokott $a \cdot m_a/2$ képletet kapjuk, ahhoz még egy kicsit „dolgozni" kell: az egyik oldalt és a hozzá tartozó magasságot ki kell fejezni a csúcsok koordinátáival (de ez egy igen szép képletet ad, amelyet egyszer érdemes lehet levezetni magunknak).

A normáltartomány területe után beláttuk, hogy integrálható – speciálisan: folytonos – függvény grafikonja nullmértékű. Ez valójában az előző tételből is kihozható, de megnéztük a bizonyítást oszcillációs összeg segítségével. Ezek az összegek egy téglafedését adják a grafikonnak, és az integrálhatóság miatt az összterületük tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet.

Következményként kipottyant a szakaszok nullmértékűsége, ugyanis egy nem függőleges szakasz egy lineáris függvény grafikonja. A függőleges esetben pedig a szakaszt lefedhetjük $\varepsilon \cdot \ell$ területű téglával, ahol ℓ a szakasz két végpontjának távolsága. A szakaszok nullmértékűsége magával vonja a sokszögek mérhetőségét, hiszen egy sokszöget véges sok szakasz határol, tehát a sokszög határa nullmértékű, így a sokszög mérhető.

Ezt követően áttértünk a Jordan-mértékre a számegyenesen. Itt a tégla szerepét $R = [a,b]$ játssza, amelyre definíció szerint $t([a,b]) := b - a$. Felírtuk korlátos halmaz külső és belső hosszának definícióját, majd a mérhetőségét, Jordan-mértékét (hosszát) értelmeztük. Összefoglaltuk (bizonyítás nélkül), hogy a kétdimenzióban megismert 1)–4) tulajdonságok mind érvényben maradnak, továbbá a Jordan-mérhető halmazok halmazgyűrűt alkotnak.

Az egy- és kétdimenziós Jordan-mértéket egy fontos tétel kapcsolja össze, amelyhez a szekciók fogalmát vezettük be (és rajzot is készítettünk) adott $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz esetén:

$$H_x := \{y : (x,y) \in H\}, \qquad H^y := \{x : (x,y) \in H\}.$$

Ekkor, ha H mérhető és része az $[a,b] \times [c,d]$ téglának, akkor

$$t_2(H) = \int_a^b k_1(H_x)\,dx = \int_a^b b_1(H_x)\,dx,$$
$$t_2(H) = \int_c^d k_1(H^y)\,dy = \int_c^d b_1(H^y)\,dy,$$

ahol t_2 a két-, k_1, b_1 pedig az egydimenziós megfelelő mértékeket jelöli. Végigpásztázva a halmazt, a szekcióhosszak (vagy belső/külső hosszak, ha nem mérhető minden szekció) integráljaként előáll a halmaz területe.

Ezután érdekes példaként a Cantor-halmazzal foglalkoztunk. Rekurzívan bevezettük minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén a C_n halmazt, amely 2^n darab $1/3^n$ hosszú intervallum uniója: a $[0, 1]$-ből indulva minden lépésben elhagyjuk a meglévő intervallumok középső nyílt harmadát. A Cantor-halmazt a C_n halmazok metszeteként értelmeztük. A definíció alapján közvetlenül adódik, hogy a Cantor-halmaz nullmértékű. Meggondoltuk, hogy a Cantor-halmazban azok a $0, a_1a_2a_3\ldots$ alakú végtelen „harmados-törtek" vannak, amelyekre $a_i = 0$ vagy $a_i = 2$ minden i esetén. A C_n intervallumvégpontjai mind ilyenek, de nem csak ezek maradnak a metszetben, hanem például $0, 02020202\ldots = 1/4$ is.

Innentől csupa mese következett (vizsgán nem kérem számon). Megemlítettem, hogy a Cantor-halmaz számossága a valós számok számosságával egyezik meg (neve: kontinuum). A Cantor-halmaz tehát mérték szempontjából kicsi, de számosság szempontjából nagy. Ezután a Cantor-halmaz önhasonlóságáról beszéltünk: előáll, mint két $1/3$ arányú kicsinyített másának uniója. Ennek segítségével kihoztuk, hogy a Cantor-halmaz hasonlósági dimenziója (bármi is az precízen) $\log_3 2$, amely egy 0 és 1 közötti szám. A Cantor-halmaz tehát egy úgynevezett fraktál.

Fraktálra egy másik példaként a Sierpiński-szőnyeget hoztam fel: az egységnégyzetből kiindulva minden lépésben a középső nyílt kilenced kis négyzetet hagyjuk el. A Sierpiński-szőnyeg hasonlósági dimenziója $\log_3 8$, amely 1 és 2 között van.

Végül legutolsó példaként a szfinx ötszöget rajzoltam fel, és azt állítottam, hogy előáll 4 darab ugyanolyan arányban kicsinyített másának uniójaként; sőt 4 helyett ez igaz 9-re is (ez utóbbi esetben többféle előállítás is létezik, ezek megtalálását szórakoztató házinak adtam), sőt valójában tetszőleges négyzetszámra! Megoldatlan, hogy van-e más ötszög, amely felbontható egybevágó, az eredetihez hasonló részekre (ha a felbontás részeinek egybevágóságát nem követeljük meg, akkor van ilyen).