Többváltozós analízis 2. előadás

Osztatlan matematikatanár szak 8. félév, 2018. tavasz

3. előadás (február 26.)

Az óra elején visszatértünk a rezgőmozgásra. Az előző előadáson láttuk, hogy a harmonikus rezgőmozgást leíró differenciálegyenlet megoldásai $x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$ alakban írhatók fel, ahol az ω_0 értéket szokás a rezgés sajátfrekvenciájának hívni. Bevezetve az $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ számot és egy olyan φ_0 szöget, amelyre $\sin \varphi_0 = c_1/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos \varphi_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, a megfelelő addíciós képletből nyerjük, hogy $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. A rugón lévő test tehát – ahogy szemléletünk alapján várjuk – periodikus mozgást fog végezni, méghozzá $T = 2\pi/\omega_0$ periódusidővel és A amplitúdóval.

Ha a testre külső kényszererő hat, az egyszerűség kedvéért $F(t) = M \sin(\omega_k t)$ alakot feltételezünk, akkor a megoldás $\omega_k \neq \omega_0$ esetén

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{M}{m(\omega_0^2 - \omega_k^2)} \sin(\omega_k t);$$

ha pedig $\omega_k = \omega_0$, akkor

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{M}{2m} t \cos(\omega_0 t).$$

Mindez könnyen ellenőrizhető a múlt órán tárgyalt „összes megoldás egyenlő homogén általános plusz inhomogén partikuláris” észrevétel felhasználásával (csupán behelyettesítéssel ellenőrizni kell a partikuláris megoldást). Azt látjuk, hogy ha a kényszererő frekvenciája különbözik a rendszer sajátfrekvenciájától, akkor a harmonikus rezgőmozgásra „rárakódik” egy periodikus rezgés (a rendszer válasza a külső erőre). Ha azonban a kényszer frekvenciája megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával, akkor egy nem korlátos tag adódik a harmonikus rezgéshez (a $t \cos t$ függvény grafikonját fel is rajzoltam), vagyis a rugónak tetszőlegesen nagy kitérései is lesznek, ami egy idő után fizikailag nem lehetséges, a rugó elszakad (a valóságban persze van súrlódás, amit most nem vettünk figyelembe). Ezt az $\omega_k = \omega_0$ esetet szokás rezonanciának hívni, amelyet a hétköznapokban is sokszor tapasztalhatunk (utolsó előadáson levetítem a Tacoma-híd leszakadását). Ezzel a differenciálegyenletek témakörét befejeztük, következik a Jordan-mérték.

Először egy kis motivációval kezdtem. Feltettem azt a kérdést, hogy vajon „a táblára felrajzolt krumpli területe egyenlő 2 egység” kijelentés mit jelent? Egyáltalán a terület mit jelent? Van-e minden síkidomnak területe? Megbeszéltük, hogy a terület valójában egy függvény, amely a területtel rendelkező síkidomokhoz egy valós számot rendel. Összeszedtük, hogy milyen tulajdonságokat várunk el ettől a t-vel jelölt függvénytől (ez egyelőre csak motiváció, még nem definiáltam semmit):

1. nemnegatív: $t \geq 0$;
2. additív: ha A és B egymásba nem nyúlóak (és van területük), akkor $t(A \cup B) = t(A) + t(B)$;
3. eltolásra nézve invariáns: $t(A + v) = t(A)$, ahol v az eltolás vektora;
4. normált: $t([0, 1] \times [0, 1]) = 1$.

Ezek után előrevetítettem a terület fogalmának általunk tárgyalt kétféle felépítését: az egyik a téglafedésekkel és beírt téglákkal való közelítés, a másik a síkbeli, $1/n$ oldalhosszúságú kis négyzetek alkotta négyzetrács segítségével való értelmezés. A két megközelítés ugyanazt fogja adni, ezt látjuk is majd.

A definíciók előtt célszerű volt felidézni, hogy milyen fogalmak fognak lépten-nyomon felbukkanni a ponthalmazelméletből: gömbök, halmaz belső, külső és határpontja, halmaz belseje, külseje és határa. Egy új fogalom a halmaz lezártja: $\operatorname{cl} H := \operatorname{int} H \cup \partial H$. Megjegyeztem (bizonyítás nélkül), hogy a lezárt mindig zárt, sőt, valójában ez a legszűkebb zárt halmaz, amely tartalmazza az adott H halmazt. Definiáltuk még a (tengelypárhuzamos) téglát, amely $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ alakú halmaz, ahol minden j-re $a_j < b_j$ valós számok (a kétdimenziós esetet – téglalap – fel is rajzoltam). Végül az egymásba nem nyúló halmazokat értelmeztem: A és B egymásba nem nyúló, ha nincs közös belső pontjuk, azaz $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \emptyset$. Itt rögtön felhívtam a figyelmet a diszjunkt és az egymásba nem nyúló fogalmak közötti különbségre.

Ennyi előkészület után rátértünk a Jordan-féle terület bevezetésére. Rögtön felhívtam a figyelmet, hogy csakis korlátos halmazokkal foglalkozunk – a definícióra is emlékeztettem, és mondtam két ekvivalens megfogalmazást (1. lefedhető gömbbel; 2. lefedhető téglával).

Ha $R = [a, b] \times [c, d]$ tégla, akkor $t(R) := (b - a)(d - c)$ (ez egyelőre egy szám, de a fejünkben ez a tégla „elvárt” területe). Ha pedig H tetszőleges korlátos halmaz a síkon, akkor H külső területe legyen

$$k(H) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} t(T_j) : T_j \ (j = 1, \dots, \ell) \text{ téglák, amelyekre } H \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} T_j \right\}.$$

Rögtön megnéztük, hogy a halmaz, amelynek infimumát vesszük nem üres (H korlátos, így téglával lefedhető) és alulról korlátos (a 0 egy alsó korlát), tehát $k(H)$ nemnegatív valós szám.

A H halmaz belső területe pedig legyen

$$b(H) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} t(T_j) : T_j \ (j = 1, \dots, \ell) \text{ egymásba nem nyúló téglák, amelyekre } \bigcup_{j=1}^{\ell} T_j \subset H \right\},$$

ha H tartalmaz téglát (vagyis a belseje nem üres), és $b(H) := 0$, amennyiben H nem tartalmaz téglát. Erről egyelőre nem világos, hogy nem lehet-e végtelen, de hamarosan ki fog derülni, hogy $b(H) \leq k(H)$ minden korlátos halmazra. E cél felé haladva bevezettük a négyzetrács fogalmát a síkon:

$$\mathcal{K}_n := \left\{ \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] : i, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A négyzetrács elemeire „kis négyzetek”-ként fogok hivatkzni. Adott korlátos H halmaz és $\mathcal{K}_n$ négyzetrács esetén egy $K \in \mathcal{K}_n$ négyzet a H-nak belső négyzete, ha $K \subset \operatorname{int} H$; külső négyzete, ha $K \subset \operatorname{ext} H$; és határnégyzete, ha nem belső és nem határnégyzet. Mindezt egy rajzon illusztráltuk is. Ezt követően bevezettünk két mennyiséget (ahol az abszolút érték az elemszámot jelöli):

$$b_n(H) := \frac{|\{K \in \mathcal{K}_n : K \subset \operatorname{int} H\}|}{n^2},$$

ami szemléletesen a H belső négyzeteinek területösszege; és

$$k_n(H) := \frac{|\{K \in \mathcal{K}_n : K \cap \operatorname{cl} H \neq \emptyset\}|}{n^2}.$$

ami szemléletesen H belső és határnégyzeteinek területösszege (itt bizonyítás nélkül megjegyeztem, hogy $K \cap \operatorname{cl} H \neq \emptyset$ azzal egyenértékű, hogy K belső négyzet vagy határnégyzet).

A fő tétel a következő volt (bizonyítás nélkül): ha H tégla, akkor $n \to \infty$ esetén $b_n(H) \to t(H)$ és $k_n(H) \to t(H)$; ha pedig H tetszőleges korlátos halmaz, akkor $b_n(H) \to b(H)$ és $k_n(H) \to k(H)$.

Mivel definíció alapján nyilvánvaló, hogy $b_n(H) \leq k_n(H)$, így határátmenettel megkaptuk a már előrevetített $b(H) \leq k(H)$ összefüggést. Ez alapján az óra végén bevezettük a Jordan-mérhetőség fogalmát: a H korlátos halmaz mérhető, ha $b(H) = k(H)$, és ekkor ez a közös érték a H halmaz Jordan-mértéke (területe).