Bevezető analízis előadás

Rövid ciklusú matematikatanár szak, 2018. ősz

1. alkalom (szeptember 14.)

Az óra elején röviden elmondtam a tárggyal kapcsolatos legfontosabb információkat (tematika, számonkérés, jegyzet stb.); a gyakorlatokról keveset szóltam majd a gyakorlatvezető fog mindenről tájékoztatni; egyébként minden részletesen elolvasható az `abesenyei.web.elte.hu` oldalon. .

Ezután belevágtunk a logika témakörébe. Megbeszéltük, hogy logikai állításon olyan kijelentést értünk, amelynek az igazságértéke egyértelműen eldönthető, majd rátértünk a logikai műveletekre ($\wedge, \vee, \implies, \iff, \neg$), amelyekkel állításokból újabb állításokat készíthetünk. Pontosan definiáltuk az így gyártott állítások mindegyikének igazságértét (vagyis, hogy mikor igaz és mikor hamis; az egyik esetben egy logikai táblázatot is felírtunk). Az $A \vee B$ kapcsán felhívtam a figyelmet, hogy a matematikában a „vagy" mindig megengedő és nem kizáró. Humoros példaként a jól ismert „Ön dönt, iszik vagy vezet." felhívást idéztem, amelyet a hétköznapokban másképp értelmezünk (egyszerre nem engedjük meg az ivást és a vezetést is), mint a matematikában (itt megengedjük, hogy a vagy kapcsolat mindkét tagmondata igaz legyen). Az $A \implies B$ következtetés ürügyén pedig egy kicsit elidőztünk azon, hogy a „Hamis állításból minden következik.", amelynek illusztrációjaként szóban bebizonyítottam, hogy „ha $1 = 2$, akkor én vagyok a pápa" (szerencsére $1 \neq 2$).

Ezt követően tisztáztuk a különböző logikai műveletek és a tagadás kapcsolatát, ezek az úgynevezett de Morgan-féle azonosságok, pl. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ (de Morgannel kapcsolatban házi feladatként feladtam, hogy vajon mikor születhetett, ha egyszer az életkorát kérdezőknek azt válaszolta, hogy „x éves voltam az x^2 évben").

Következett ezután a nyitott mondat „fogalma" (olyan állítás, amelynek igazságértéke egy vagy több változótól függ), majd bevezettük az univerzális ($\forall$) és egzisztenciális ($\exists$) kvantorokat, és megbeszéltük az igazságértéküket, tagadásukat: $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$, $\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$, $\neg(\exists x A(x)) = \forall x \neg A(x)$. Végül megjegyeztem, hogy ha egy $A(x) \implies B(x)$ típusú állítást látunk, akkor általában odaértjük elé, hogy minden x-re (és így a tagadása úgy fog kezdődni, hogy van olyan x, amelyre...).

Rátértünk ezt követően a bizonyítási módszerekre, először az indirekt bizonyítás menetét néztük meg. Példaképpen a $\sqrt{2}$ irracionalitását hoztam fel, ez gyakorlaton fog szerepelni.

Majd jött a teljes indukció legegyszerűbb formája: ha A_1 igaz, és $\forall n(A_n \implies A_{n+1})$, akkor ezzel beláttuk, hogy $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mind igazak. Megjegyeztem, hogy gyakran nem A_1 a kiinduló állítás, ilyenkor nyilván onnatól kezdve láttuk be az A_n állítások igazságát.

Ezután rátértünk a halmazok témakörére. Megbeszéltük, hogy a halmaz és eleme alapfogalom. Ezt követően tisztáztuk (logikai jelekkel) halmazok egyenlőségét, tartalmazását, az üreshalmazt, majd a halmazműveleteket – unió, metszet, különbség, komplementer – értelmeztem (két halmaz esetén, valamint tetszőleges A_i halmazokra, ahol $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Felírtam a különböző műveleti tulajdonságokat.