

Kiegészítő feladatsor

1. Mely a_n sorozatokra igaz, hogy a

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots$$

kifejezésben bárhogy választjuk meg az előjeleket, mindig konvergens sort kapunk?

2. Mely a_n sorozatokra igaz, hogy a

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots$$

kifejezésben meg lehet úgy választani az előjeleket, hogy konvergens sort kapjunk?

3. Tegyük föl, hogy H a sík egy korlátos részhalmaza. Melyik állításból következik a másik?

(P) H Jordan-mérhető

(Q) H határa Jordan-mérhető

4. Bizonyítsuk be, hogy a síkon minden szakasz nullmértékű!

5. Legyenek A és B a sík részhalmazai. Bizonyítsuk be az alábbiakat!

$$\text{a) } \partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B \quad \text{b) } \partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B \quad \text{c) } \partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$$

6. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis által határolt tartomány területét (normáltartományként)!

7. Határozzuk meg az alábbi síkbeli halmaz területét!

$$\left\{ (x, y) : x \in [0, 2], -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq y \leq \frac{1}{2^x + 4^x} \right\}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a síkon egy zárt téglát lefedünk végtelen sok nyílt téglával, akkor a nyílt téglák közül kiválasztható véges sok úgy, hogy már azok is fedjék a zárt téglát!

9. Egy láthatatlan bolha percenként ugyanakkorát ugorva az origóból indulva elkezd ugrálni a számegeyenesen. Az ugrás hosszát nem ismerjük, az

a) bármekkora pozitív valós szám lehet.

b) bármekkora valós szám lehet.

Az indulás utáni első perctől kezdve minden percben rácsaphatunk egy 1 hosszú szakaszra. Van-e olyan stratégia, melyet követve előbb vagy utóbb biztosan le fogjuk csapni a bolhát? (Természetesen feltesszük, hogy örökké élünk.)

10. Egy másik láthatatlan bolha percenként ugyanakkorát ugorva az origóból indulva most a síkon kezd el ugrálni. Az ugrás most egy ismeretlen, rögzített síkvektor. Az indulás utáni első perctől kezdve minden percben rácsaphatunk egy (tengelypárhuzamos) egységnyezetre. Van-e olyan stratégia, melyet követve előbb vagy utóbb biztosan le fogjuk csapni ezt a bolhát?