Bevezető analízis 2, 2017. tavasz, 2. gyakorló feladatsor

Tudnivalók. Minden feladat 1 pontot, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható, azonban súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson vagy gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Előadáson/Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. A megoldásra 120 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!** Jó munkát!

---

1. Legyen $H = \left\{ \dfrac{n}{n+k} : k, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$. Határozzuk meg definíció szerint a H halmaz szuprémumát és infimumát!

2. Legyenek H, K nemüres valós számhalmazok. Mi a logikai kapcsolat az alábbi kijelentések között?

   P: $\sup H < \inf K$.

   Q: $\forall h \in H \ \forall k \in K : h < k$.

3. Sejtsük meg az $a_n = \dfrac{2n+1}{2n^2 - n}$ sorozat határértékét, majd definíció szerint (azaz küszöbszám megadásával) igazoljuk a sejtést!

4. Számítsuk ki az $a_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n + n^{100}}$ sorozat határértékét (a határértékre vonatkozó összefüggések alkalmazásával)!

5. a) Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) pozitív tagú divergens sorozatok, amelyekre az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat konvergens?

   b) Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) pozitív tagú konvergens sorozatok, amelyekre az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat divergens?

6. Tegyük fel, hogy $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$. Mi a logikai kapcsolat az alábbi kijelentések között?

   P: $\exists N \ \forall n > N : a_n < b_n$.

   Q: $a_n \prec b_n$.

7. Legyen $a_1 = 1$ és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 2$. Van-e az (a_n) sorozatnak 3,9999-nél nagyobb tagja?