Bevezető analízis 2 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 2. félév, 2017. tavasz

8. előadás (április 19.)

Az órát négy nevezetes határértékkel kezdtük. Először beláttuk, hogy az (n^k) hatványsorozat határértéke 1, ha $k = 0$; ∞, ha $k > 0$ és egész; továbbá 0, ha $k < 0$ és egész. Ezután a Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével megmutattuk, hogy $a > 1$ esetén $a^n \to \infty$ (ezt exponenciális növekedésnek hívtam), majd igazoltuk (visszavezetéssel), hogy $|a| < 1$ esetén $a^n \to 0$. Kimondtam (de nem láttam be, hanem meggondolásra feladtam házinak), hogy $a \leq -1$ esetén (a^n) oszcillálva divergens (mert sem alulról, sem felülről nem korlátos). Ezt követően megmutattuk, hogy $a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$, ezt az előző típusú határértékre vezettük vissza n-edikre emeléssel. Végül pedig az $\sqrt[n]{n} \to 1$ határértéket igazoltuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával.

A következő témakör a sorzatok átrendezése volt. A (b_n) sorozat az (a_n) egy átrendezése, ha van olyan $\pi\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ bijekció (permutáció), hogy $b_n = a_{\pi(n)}$. Például az $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ sorozat egy átrendezése az $a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, \dots$ sorozat, ahol most $\pi(2k) = 2k-1$ és $\pi(2k-1) = 2k$, hiszen $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_4$, $b_4 = a_3, \dots$. A határérték második definíciója alapján azonnal adódik, hogy az átrendezés nem változtatja meg a határértéket. Az átrendezás után a részsorozat következett. Ha $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ pozitív egészek sorozata, akkor a $b_k = a_{n_k}$ sorozat az (a_n) sorozat egy részsorozata. A definíció alapján ismét könnyű látni, hogy ha (a_n)-nek a határértéke a (amely lehet véges vagy végtelen, akkor minden részsorozatának is ez a határértéke. Végül megjegyeztük, hogy véges sok tag elhagyása vagy hozzávétele ugyancsak nem befolyásolja a sorozat besorolását. Végtelen sok tag elhagyása, elvétele már befolyásolhatja, például a $(-1)^n$ sorozatból elhagyva a páros indexűeket, egy konvergens sorozatot kapunk; visszafele pedig egy konvergensből egy oszcillálva divergenst.

Rátértünk ezt követően a limesz és műveletek kapcsolatára, az összeadással kezdtük. Egy táblázatba foglalva kimondtam, hogy ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor mit mondhatunk az $(a_n + b_n)$ összegsorozat határértékéről. Beláttuk, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \to a + b$ (a bizonyításban a háromszög-egyenlőtlenséget használtuk); ha $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$; ha $a = \infty$, $b = \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$; többit házinak adtam ezek alapján meggondolni. A táblázatban két helyen kérdőjeleket hagytunk, amelyek a kritkus határértékeket jelentik, konkrétan, amikor a és b közül az egyik ∞, a másik pedig $-\infty$. Ebben az esetben $a_n + b_n$ viselkedése a konkrét sorozatoktól függ, mind a négy kategóriába eső példát lehet adni, és adtunk is: $a_n = n + c$, $b_n = -n$ esetén $a - n + b_n = c \to c$; $a_n = 2n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = n \to \infty$; $a_n = n$, $b_n = -2n$ esetén $a_n + b_n = -n \to -\infty$; $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = -n$ esetén $a_n + b_n = (-1)^n$.

Az óra végén megjegyeztem, hogy a limesz és összeadás kapcsolata két tag helyett véges sok (pl. három) tagra is átvihető. De vigyázzunk, mert például az n tagú $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$ összeg minden tagja 0-hoz tart, és az összeg minden n-re 1 (itt azért nem használhatjuk a tételünket, mert az összeg tagjainak száma nem fix).